



## Applications linéaires continues, normes matricielles

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable

### Exercice 1 \*

On munit  $E = \mathbb{R}[X]$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par :  $\forall P \in E, \|P\|_\infty = \sup \left\{ \left| \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \right|, n \in \mathbb{N} \right\}$ .

1. Vérifier brièvement que  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme sur  $E$ .
2. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $\forall P \in E, f(P) = XP$ . Démontrer que l'application  $f$  est continue sur  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  et déterminer  $\|f\|$ .

Correction ▼

[005854]

### Exercice 2 \*\*

On munit  $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des suites bornées de la norme  $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ .

On considère les endomorphismes  $\Delta$  et  $C$  de  $\ell^\infty(\mathbb{C})$  définis par :

$$\forall u \in E, \Delta(u) = v \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n \text{ et } \forall u \in E, C(u) = w \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Montrer que  $\Delta$  et  $C$  sont continus sur  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  et calculer leur norme.

Correction ▼

[005855]

### Exercice 3 \*\*\* I

On munit  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  de la norme 1 définie par  $\forall f \in E, \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

On pose  $T : E \rightarrow E$  et on admet que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

$$f \mapsto Tf : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

1. Démontrer que  $T$  est continu sur  $(E, \|\cdot\|_1)$  et déterminer  $\|T\|$ .
2. Vérifier que la borne supérieure n'est pas atteinte.

Correction ▼

[005856]

### Exercice 4 \*\*

On munit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de la norme  $N$  définie par  $\forall A \in E, N(A) = \sup_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}$  (on admet que  $N$  est une norme sur  $E$ ).

Soit  $f$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\forall A \in E, f(A) = \text{Tr}(A)$ . Démontrer que l'application  $f$  est continue sur  $(E, N)$  et déterminer  $\|f\|$ .

Correction ▼

[005857]

### Exercice 5 \*\*\*

Déterminer  $s = \sup \left\{ \frac{\|AB\|}{\|A\| \|B\|}, (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2 \right\}$  quand  $\|\cdot\|$  est

1.  $\| \cdot \|_1$ ,
2.  $\| \cdot \|_2$ ,
3.  $\| \cdot \|_\infty$ .

[Correction ▼](#)

[005858]

### Exercice 6 \*

Une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ( $n \geq 2$ ), est-elle nécessairement une norme trois barres ?

[Correction ▼](#)

[005859]

### Exercice 7 \*\*

Soit  $N$  une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Montrer qu'il existe  $k > 0$  tel que  $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, N(AB) \leq k(A)N(B)$ .

[Correction ▼](#)

[005860]

### Exercice 8 \*\*

Existe-t-il une norme  $N$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ( $n \geq 2$ ) telle que  $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, N(AB) = N(A)N(B)$ .

[Correction ▼](#)

[005861]

### Exercice 9 \*\*\*

On pose  $\forall X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  et  $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

Déterminer les normes sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  respectivement associées aux normes  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_\infty$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On notera  $||| \cdot |||_1$  et  $||| \cdot |||_\infty$  ces normes.

[Correction ▼](#)

[005862]

### Exercice 10 \*\*I

Pour  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on pose  $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ . Pour  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , on note  $\rho(A)$  le rayon spectral de  $A$  c'est-à-dire  $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ .

Montrer que  $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), |||A|||_2 = \rho(A)$  où  $|||A|||_2 = \text{Sup} \left\{ \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\}$ .

[Correction ▼](#)

[005863]

## Correction de l'exercice 1 ▲

- Soit  $P \in E$ . Si on pose  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall k > n, a_k = 0$ . Donc  $\|P\|_\infty = \text{Sup} \left\{ \left| \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \right|, k \in \mathbb{N} \right\} = \text{Max} \{ |a_k|, 0 \leq k \leq n \}$  existe dans  $\mathbb{R}$ .
  - $\forall P \in E, \|P\|_\infty \geq 0$ .
  - Soit  $P \in E$ .  $\|P\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, |a_k| \leq 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, a_k = 0 \Rightarrow P = 0$ .
  - Soient  $P \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\|\lambda P\|_\infty = \text{Max} \{ |\lambda a_k|, 0 \leq k \leq n \} = |\lambda| \text{Max} \{ |a_k|, 0 \leq k \leq n \} = |\lambda| \|P\|_\infty$ .
  - Soient  $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k \geq 0} b_k X^k$  deux polynômes. Pour  $k \in \mathbb{N}, |a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$  et donc  $\|P + Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$ .

$\| \cdot \|_\infty$  est une norme sur  $E$ .

- $\forall P \in E, \|f(P)\|_\infty = \|P\|_\infty$  et donc  $\forall P \in E \setminus \{0\}, \frac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty} = 1$ . On en déduit que  $\text{Sup} \left\{ \frac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty}, P \in E \setminus \{0\} \right\} = 1$ . Ceci montre tout à la fois que  $f$  est continue sur  $(E, \| \cdot \|_\infty)$  et  $\|f\| = 1$ .

$f$  est continue sur  $(E, \| \cdot \|_\infty)$  et  $\|f\| = 1$ .

## Correction de l'exercice 2 ▲

(La linéarité de  $\Delta$  est claire et de plus  $\Delta$  est un endomorphisme de  $E$  car si  $u$  est une suite bornée,  $\Delta(u)$  l'est encore. Plus précisément,)

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |\Delta(u)_n| \leq |u_n| + |u_{n+1}| \leq 2\|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E, \|\Delta(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty.$$

Ceci montre que  $\Delta$  est continu sur  $E$  et  $\|\Delta\| \leq 2$ . Ensuite, si  $u$  est la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$  alors  $u$  est un élément non nul de  $E$  tel que  $\|u\|_\infty = 1$  et  $\|\Delta(u)\|_\infty = 2$ . En résumé,

- $\forall u \in E \setminus \{0\}, \frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leq 2,$
- $\exists u \in E \setminus \{0\}, \frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 2.$

On en déduit que

$\Delta$  est continu sur  $(E, \| \cdot \|_\infty)$  et  $\|\Delta\| = 2$ .

(La linéarité de  $C$  est claire et  $C$  est un endomorphisme de  $E$  car si  $u$  est bornée,  $C(u)$  l'est encore. Plus précisément,)

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |(C(u))_n| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \|u\|_\infty = \|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E, \|C(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty.$$

Par suite  $T$  est continu sur  $E$  et  $\|T\| \leq 1$ . Ensuite, si  $u$  est la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$  alors  $u$  est un élément non nul de  $E$  tel que  $\|u\|_\infty = 1$  et  $\|C(u)\|_\infty = 1$ . En résumé,

- $\forall u \in E \setminus \{0\}, \frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leq 1,$
- $\exists u \in E \setminus \{0\}, \frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 1.$

On en déduit que

$C$  est continu sur  $(E, \| \cdot \|_\infty)$  et  $\|C\| = 1$ .

## Correction de l'exercice 3 ▲

1. Soit  $f \in E$ .

$$\begin{aligned} \|Tf\|_1 &= \int_0^1 |Tf(x)| dx = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t) dt \right| dx \\ &\leq \int_0^1 \left( \int_0^x |f(t)| dt \right) dx \\ &\leq \int_0^1 \left( \int_0^1 |f(t)| dt \right) dx = \int_0^1 \|f\|_1 dx = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Ceci montre que  $\forall f \in E \setminus \{0\}$ ,  $\frac{\|Tf\|_1}{\|f\|_1} \leq 1$ . Ceci montre que  $T$  est continu sur  $(E, \|\cdot\|_1)$  et que  $\|T\| \leq 1$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ , posons  $f_n(x) = (1-x)^n$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[ -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

puis pour  $x \in [0, 1]$ ,  $Tf_n(x) = \int_0^x (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}(1 - (1-x)^{n+1})$  et donc

$$\|Tf_n\|_1 = \int_0^1 |Tf_n(x)| dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 (1 - (1-x)^{n+1}) dx = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|T\| \geq \frac{\|Tf_n\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{n+2}$ .

En résumé,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{n+1}{n+2} \leq \|T\| \leq 1$  et donc  $\|T\| = 1$ .

**$T$  est continu sur  $(E, \|\cdot\|_1)$  et  $\|T\| = 1$ .**

2. Supposons qu'il existe  $f \in E \setminus \{0\}$  tel que  $\|Tf\|_1 = \|f\|_1$ . On en déduit que chaque inégalité écrite au début de la question 1) est une égalité et en particulier  $\int_0^1 \left( \int_0^x |f(t)| dt \right) dx = \int_0^1 \left( \int_0^1 |f(t)| dt \right) dx$  ou encore  $\int_0^1 \left( \int_0^1 |f(t)| dt - \int_0^x |f(t)| dt \right) dx = 0$ . Par suite,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\int_0^1 |f(t)| dt - \int_0^x |f(t)| dt = 0$  (fonction continue, positive, d'intégrale nulle) puis en dérivant la dernière inégalité,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $|f(x)| = 0$  et finalement  $f = 0$ . Ceci est une contradiction et donc  $\|T\|$  n'est pas atteinte.

### Correction de l'exercice 4 ▲

L'application  $f$  est linéaire de  $(E, N)$  dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ . Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in E$ .

$$\begin{aligned} |f(A)| = |\text{Tr}(A)| &\leq \sum_{i=1}^n |a_{i,i}| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \leq \sum_{i=1}^n N(A) = nN(A). \end{aligned}$$

Ceci montre déjà que  $f$  est continue sur  $(E, N)$  et que  $\|f\| \leq n$ . De plus, si  $A = I_n \neq 0$ ,  $\frac{|f(A)|}{N(A)} = \frac{n}{1} = n$ . Donc

**$f$  est continue sur  $(E, N)$  et  $\|f\| = n$ .**

### Correction de l'exercice 5 ▲

•  $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A\|_\infty = \text{Max}\{|a_{i,j}|, 1 \leq i, j \leq n\}$ .

Soient  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Posons  $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  où  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$ .  
Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,

$$|c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n \|A\|_\infty \|B\|_\infty,$$

et donc,  $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$ . Ainsi,  $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2$ ,  $\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty \|B\|_\infty} \leq n$ .

De plus, pour  $A_0 = B_0 = (1)_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$ ,  $\|A_0\|_\infty = \|B_0\|_\infty = 1$  puis  $\|A_0 B_0\|_\infty = \|n A_0\|_\infty = n$  et donc  $\frac{\|A_0 B_0\|_\infty}{\|A_0\|_\infty \|B_0\|_\infty} = n$ . Ceci montre que

$$\text{Sup} \left\{ \frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty \|B\|_\infty}, (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2 \right\} = n.$$

En particulier,  $\|\cdot\|_\infty$  n'est pas une norme sous-multiplicative.

•  $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A\|_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$ . Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} \|AB\|_1 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} |c_{i,j}| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \right) = \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} |a_{i,k}| |b_{k,j}| \\ &= \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} |a_{i,j}| |b_{k,l}| = \|A\|_1 \|B\|_1. \end{aligned}$$

Donc  $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2$ ,  $\frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1 \|B\|_1} \leq 1$ .

De plus, pour  $A_0 = B_0 = E_{1,1}$ , on a  $A_0 B_0 = E_{1,1}$  et donc  $\frac{\|A_0 B_0\|_1}{\|A_0\|_1 \|B_0\|_1} = 1$ . Ceci montre que

$$\text{Sup} \left\{ \frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1 \|B\|_1}, (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2 \right\} = 1.$$

En particulier,  $\|\cdot\|_1$  est une norme sous-multiplicative.

•  $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2}$ . Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} \|AB\|_2^2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{i,j}^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \\ &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \quad (\text{inégalité de CAUCHY-SCHWARZ}) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left( \sum_{l=1}^n b_{l,j}^2 \right) = \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \left( \sum_{1 \leq i, k \leq n} a_{i,k}^2 \right) \left( \sum_{1 \leq j, l \leq n} b_{l,j}^2 \right) = \|A\|_2 \|B\|_2 \end{aligned}$$

Donc  $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2$ ,  $\frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2 \|B\|_2} \leq 1$ .

De plus, pour  $A_0 = B_0 = E_{1,1}$ , on a  $A_0 B_0 = E_{1,1}$  et donc  $\frac{\|A_0 B_0\|_2}{\|A_0\|_2 \|B_0\|_2} = 1$ . Ceci montre que

$$\text{Sup} \left\{ \frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2 \|B\|_2}, (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2 \right\} = 1$$

En particulier,  $\|\cdot\|_2$  est une norme sous-multiplicative.

### Correction de l'exercice 6 ▲

Une norme trois barres sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est nécessairement sous-multiplicative. L'exercice précédent montre qu'il existe des normes sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui ne sont pas sous-multiplicatives (par exemple  $\|\cdot\|_\infty$ ). Donc une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  n'est pas nécessairement une norme trois barres.

---

### Correction de l'exercice 7 ▲

Soit  $N$  une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . D'après l'exercice 5,  $\|\cdot\|_1$  est une norme sous-multiplicative.

Puisque  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{R}$ ,  $N$  et  $\|\cdot\|_1$  sont des normes équivalentes. Par suite, il existe deux réels strictement positifs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha\|\cdot\|_1 \leq N \leq \beta\|\cdot\|_1$ .

Pour  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ ,

$$N(AB) \leq \beta\|AB\|_1 \leq \beta\|A\|_1\|B\|_1 \leq \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$$

et le réel  $k = \frac{\beta}{\alpha^2}$  est un réel strictement positif tel que  $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ ,  $N(AB) \leq kN(A)N(B)$ .

**Remarque.** Le résultat précédent signifie que  $N' = \frac{1}{k}N$  est une norme sous-multiplicative car pour  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ ,

$$N'(AB) = \frac{1}{k}N(AB) \leq \frac{1}{k}N(A)N(B) = \frac{1}{k}N(A)\frac{1}{k}N(B) = N'(A)N'(B).$$

---

### Correction de l'exercice 8 ▲

Non, car si  $A = E_{1,1} \neq 0$  et  $B = E_{2,2} \neq 0$  alors  $AB = 0$  puis  $N(AB) < N(A)N(B)$ .

---

### Correction de l'exercice 9 ▲

• Pour  $\|\cdot\|_1$ . Soient  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  puis  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} \|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \right) = \sum_{j=1}^n |x_j| \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^n |x_j| \right) \text{Max} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, 1 \leq j \leq n \right\} = \text{Max} \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \} \times \|X\|_1, \end{aligned}$$

en notant  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de la matrice  $A$ . Donc,  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A\|_1 \leq \text{Max} \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \}$ .

Soit alors  $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\|C_{j_0}\|_1 = \text{Max} \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \}$ . On note  $X_0$  le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles sauf la  $j_0$ -ème qui est égale à 1.  $X_0$  est un vecteur non nul tel que

$$\|AX_0\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}| = \text{Max} \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \} \times \|X_0\|_1.$$

En résumé,

(1)  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,  $\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} \leq \text{Max} \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \}$ ,

(2)  $\exists X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,  $\frac{\|AX_0\|_1}{\|X_0\|_1} = \text{Max} \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \}$ .

On en déduit que  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A\|_1 = \text{Max} \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \}$ .

• Pour  $\|\cdot\|_\infty$ . Soient  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  puis  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} |(AX)_i| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \left( \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \|X\|_\infty \\ &\leq \text{Max} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|, 1 \leq i \leq n \right\} \|X\|_\infty = \text{Max} \{ \|L_k\|_1, 1 \leq k \leq n \} \times \|X\|_\infty, \end{aligned}$$

en notant  $L_1, \dots, L_n$  les lignes de la matrice  $A$ . Donc,  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A\|_\infty \leq \text{Max} \{ \|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n \}$ .

Soit alors  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\|L_{i_0}\|_1 = \text{Max}\{\|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n\}$ . On pose  $X_0 = (\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq n}$  où  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\varepsilon_j$  est un élément de  $\{-1, 1\}$  tel que  $a_{i_0, j} = \varepsilon_j |a_{i_0, j}|$  (par exemple,  $\varepsilon_j = \frac{a_{i_0, j}}{|a_{i_0, j}|}$  si  $a_{i_0, j} \neq 0$  et  $\varepsilon_j = 1$  si  $a_{i_0, j} = 0$ ).

$$\begin{aligned} \|AX_0\|_\infty &= \text{Max} \left\{ \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} \varepsilon_j \right|, 1 \leq i \leq n \right\} \\ &\geq \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0, j} \varepsilon_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0, j}| = \|L_{i_0}\|_1 = \text{Max}\{\|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n\} \times \|X_0\|_\infty. \end{aligned}$$

En résumé,

$$(1) \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \text{Max}\{\|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n\},$$

$$(2) \exists X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|AX_0\|_\infty}{\|X_0\|_\infty} \geq \text{Max}\{\|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n\}.$$

On en déduit que  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\|_\infty = \text{Max}\{\|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n\}$ .

Ainsi, en notant  $C_1, \dots, C_n$  et  $L_1, \dots, L_n$  respectivement les colonnes et les lignes d'une matrice  $A$ ,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\|_1 = \text{Max}\{\|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n\} \text{ et } \|A\|_\infty = \text{Max}\{\|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n\}.$$

### Correction de l'exercice 10 ▲

Soit  $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ . Pour  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$\|DX\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2} \leq \sqrt{(\rho(D))^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = \rho(D) \|X\|_2,$$

De plus, si  $\lambda$  est une valeur propre de  $D$  telle que  $|\lambda| = \rho(D)$  et  $X_0$  est un vecteur propre associé, alors

$$\|DX_0\|_2 = \|\lambda X_0\|_2 = |\lambda| \|X_0\|_2 = \rho(D) \|X_0\|_2.$$

En résumé

$$(1) \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|DX\|_2}{\|X\|_2} \leq \rho(D),$$

$$(2) \exists X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|DX_0\|_2}{\|X_0\|_2} = \rho(D).$$

On en déduit que  $\forall D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), \|D\|_2 = \rho(D)$ .

Soit alors  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . D'après le théorème spectral, il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  et  $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$  tel que  $A = PD'P$ . De plus  $\rho(A) = \rho(D)$ . Pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \|AX\|_2 &= \|PD'PX\|_2 \\ &= \|D({}^tPX)\|_2 \text{ (car } P \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|PY\|_2 = \|Y\|_2) \\ &= \|DX'\|_2 \text{ où on a posé } X' = {}^tPX. \end{aligned}$$

Maintenant l'application  $X \mapsto {}^tPX = X'$  est une permutation de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  car la matrice  ${}^tP$  est inversible et donc  $X$  décrit  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  si et seulement si  $X'$  décrit  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . De plus, pour tout vecteur colonne  $X$ ,  $\|X'\|_2 = \|{}^tPX\|_2 = \|X\|_2$ . On en déduit que  $\left\{ \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} = \left\{ \frac{\|DX'\|_2}{\|X'\|_2}, X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\}$  et en particulier,

$$\|A\|_2 = \|D\|_2 = \rho(D) = \rho(A).$$

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \|A\|_2 = \text{Sup} \left\{ \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} = \rho(A).$$

**Remarque.** L'application  $A \mapsto \rho(A)$  est donc une norme sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et de plus cette norme est sous-multiplicative.