Séries entières

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 **

Déterminer le rayon de convergence de la série entière proposée dans chacun des cas suivants :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)^n z^n$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n}\right)^n z^n$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\ln(n!)\right)^2 z^n$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\,\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4} z^n$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{C_{2n}^n}{n^n}z^n$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\ln(n!))^a}{n!^b}z^n$
7. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{1+b^n}z^n$, $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$

Correction ▼ [005745]

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes dans leur intervalle ouvert de convergence après avoir déterminé le rayon de convergence de la série proposée.

1) (**) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$ **2)** (**) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n}{n+2}x^n$ **3)** (** I) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}$ **4)** (**) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(2n+1)!}x^n$
5) (*) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ **6)** (**) $\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{ch}\,n)x^n$ **7)** (** I) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$ **7)** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}x^n$
9) (** I) $\sum_{n=1}^{+\infty}n^{(-1)^n}x^n$ **10)** (*) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{4n}$ **11)** (**) $\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n$ **12)** (**) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$

13) (***) $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ où $a_0=a_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

14) (**) $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ où a_n est le nombre de couples (x,y) d'entiers naturels tels que $x+5y=n$.

Correction ▼ [005746]

Exercice 3

Développer en série entière les fonctions suivantes :

1) (*) $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$ **2)** (*** I) $\frac{1}{x^2-2tx+1}$, $t\in\mathbb{R}$ **3)** (*) $\ln(x^2-5x+6)$
4) (**) $\arctan\left(\frac{x\sin a}{1-x\cos a}\right)$, $a\in]0,\pi[$ **5)** (**) $\frac{1}{(x-1)(x-2)\ldots(x-p)}$ **6)** (*** I) $(\arcsin x)^2$
7) (*) $\int_0^x\cos(t^2)\,dt$ **8)** (*** I) $\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{t^4+t^2+1}$ **9)** (**) $\cos x\,\mathrm{ch}\,x$.

Correction ▼ [005747]

Exercice 4 * I

Pour x réel, on pose $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que f est ce classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005748]

Exercice 5 *** I

Soient $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ et $R > 0$ donné. Montrer que pour n suffisamment grand, P_n n'a pas de racine dans le disque fermé de centre 0 et de rayon R.

Correction ▼ [005749]

Exercice 6 **** Inverse d'une série entière

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et telle que $a_0 = 1$ (ou plus généralement $a_0 \neq 0$).

1. Montrer qu'il existe une et une seule suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \delta_{0,n}$.
2. Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ a un rayon strictement positif.

Correction ▼ [005750]

Exercice 7 *** I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$. Rayon de convergence et somme de la série entière associée à la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction ▼ [005751]

Exercice 8 ***

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$ pour x dans $]-1,1[$.

Correction ▼ [005752]

Exercice 9 *** I

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$ pour x dans $]-1,1[$ et en déduire les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

Correction ▼ [005753]

Exercice 10 ****

Pour n entier naturel, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4k+1}$. Convergence et somme de la série (numérique) de terme général u_n.

Correction ▼ [005754]

Exercice 11 ***

Soit A une matrice carrée complexe de format $p \in \mathbb{N}^*$. Rayon de convergence et somme en fonction de χ_A de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Tr}(A^n) z^n$.

Correction ▼ [005755]

Exercice 12 ***

Pour x réel, on pose $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} \, dt$. En développant F en série entière par deux méthodes différentes, montrer que pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{(2k+1)k!(n-k)!} = (-1)^n \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}.$$

Correction ▼ [005756]

Exercice 13 **

On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ puis pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = -a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \end{cases}$. Rayons et sommes de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$.

Correction ▼ [005757]

Exercice 14 *** I

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nC_{2n}^n} x^n$.

Correction ▼ [005758]

Exercice 15 *** I

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs telles que la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ait une limite réelle k. (En particulier $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ si $k = 0$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ si $k = 1$).On suppose de plus que la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un rayon de convergence égal à 1 et que la série de terme général a_n diverge.

1. Montrer que $\lim_{x\to 1} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} = k$.
2. **Applications.**
   (a) Equivalent simple quand x tend vers 1 de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n$.
   (b) Déterminer $\lim_{x\to 1} (1-x)^p \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1} x^n$ où p est un entier naturel non nul donné.

Correction ▼ [005759]

Exercice 16

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Pour x réel on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.
On suppose que pour tout entier naturel p et tout réel positif x, $|f^{(p)}(x)| \leqslant 1$. Déterminer f.

Correction ▼ [005760]

Exercice 17 **** I Développement en série entière de la fonction $x \mapsto \tan x$

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $f(x) = \tan x$.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n, $f^{(n)} = P_n \circ f$ et que les P_n sont à coefficients entiers naturels. (Utiliser $\tan' = 1 + \tan^2$).
2. En utilisant la formule de TAYLOR-LAPLACE, montrer que la série de TAYLOR à l'origine de f a un rayon de convergence R supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$.
3. On note a_n les coefficients du développement précédent et g la somme de la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. En déduire que pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = g(x)$ et que $R = \frac{\pi}{2}$.
4. Calculer a_0, a_1, a_2,..., a_7.
5. Vérifier que la fonction $x \mapsto \text{th}\, x$ est développable en série entière. Préciser le rayon et la valeur des coefficients en fonction des a_n.

Correction ▼ [005761]

Exercice 18 ***

Développer en série entière $F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(tx)\,dt$ et en déduire que pour tout réel x, $F(x)=\frac{e^{-x^2/4}}{2}\int_0^x e^{t^2/4}\,dt$.

Correction ▼ [005762]

Exercice 19 ***

Soit I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$. Rayon de convergence et somme de la série entière associée à la suite $\left(\frac{I_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Correction ▼ [005763]

Exercice 20 *** I Dénombrement de parenthésages

1. Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne et a_n le nombre de parenthésages possibles d'un produit de n éléménts de E ($(a_1=1$ conventionnellement), $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=5$, ...). Montrer que pour tout $n\geqslant 2$, $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_k a_{n-k}$.
2. Soit f la série entière associée à la suite (a_n). On suppose momentanément le rayon R de cette série strictement positif. Montrer que pour tout x de $]-R,R[$, $(f(x))^2-f(x)+x=0$.
3. Calculer R et f.
4. En déduire a_n.

Correction ▼ [005764]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $z \neq 0$. Pour $n > e^{1/|z|}$, on a $|z|\ln n > 1$ et donc la suite $((\ln n)^n z^n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, pour tout nombre complexe non nul z, la série proposée diverge grossièrement.

$$\boxed{R = 0.}$$

2. Soit $z \neq 0$. Pour $n > \frac{1}{|z|^2}$, on a $|z|\sqrt{n} > 1$ et donc la suite $((\sqrt{n})^n z^n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour tout nombre complexe non nul z, la série proposée diverge grossièrement.

$$\boxed{R = 0.}$$

3. D'après la formule de STIRLING

$$(\ln(n!))^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2\left(\left(\tfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right) = \left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln(\sqrt{2\pi})\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\ln^2 n.$$

La série entière proposée a même rayon de convergence que la série entière associée à la suite $(n^2\ln^2 n)$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2\ln^2(n+1)}{n^2\ln^2 n} = 1$, la règle de d'ALEMBERT permet d'affirmer que

$$\boxed{R = 1.}$$

4. $n^4\ln\left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} n^4\ln\left(1+\frac{1}{24n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{24}+o(1)$.

Donc $\left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{1/24}$ et

$$\boxed{R = 1.}$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \frac{C_{2n+2}^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\times\frac{n!^2}{(n+1)!^2}\times\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(2n+2)(2n+1)n^n}{(n+1)^2(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\times\frac{4n+2}{n+1}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4}{ne}.$$

et donc $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$. D'après la règle de d'ALEMBERT,

$$\boxed{R = +\infty.}$$

6. On a vu que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n$. Donc la série entière proposée a même rayon de convergence que la série entière associée à la suite $\left(\frac{(n\ln n)^a}{n!^b}\right)$. Puis

$$\frac{((n+1)\ln(n+1))^a/(n+1)!^b}{(n\ln n)^a/n!^b} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^b}$$

et donc, d'après la règle de d'ALEMBERT

$$\boxed{\text{si } b>0,\ R=+\infty,\ \text{si } b=0,\ R=1 \text{ et si } b<0,\ R=0.}$$

7. Si $a=0$, $R=+\infty$. On suppose $a\neq 0$.
   - Si $b>1$, $\frac{a^n}{1+b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{a}{b}\right)^n$ et donc $R=\frac{b}{a}$.
   - Si $b=1$, $\frac{a^n}{1+b^n}=\frac{a^n}{2}$ et $R=a$.
   - Si $0\leqslant b<1$, $\frac{a^n}{1+b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n$ et $R=a$.

   Dans tous les cas

$$\boxed{R=\frac{\text{Max}(1,b)}{a} \text{ si } a>0 \text{ et } R=+\infty \text{ si } a=0.}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. La règle de d'ALEMBERT montre que la série proposée a un rayon de convergence égal à 1.

   1ère solution. Pour $x\in]-1,1[$, on pose $f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$. f est dérivable sur $]-1,1[$ et pour x dans $]-1,1[$,

$$f'(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x).$$

   Puis, pour $x\in]-1,1[$, $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=(1-x)\ln(1-x)+x$.

   2ème solution. Pour $x\in]-1,1[$,

$$f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)x^n=x\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-x\ln(1-x)+\ln(1-x)+x.$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}=-x\ln(1-x)+\ln(1-x)+x.}$$

2. La règle de d'ALEMBERT montre que la série proposée a un rayon égal à 1. Pour $x\in]-1,1[\backslash\{0\}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n}{n+2}x^n=3\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}\right)=3\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)=3\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x^2}(x+\ln(1-x))\right)$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n}{n+2}x^n=\begin{cases}3\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x^2}(x+\ln(1-x))\right) \text{ si } x\in]-1,1[\backslash\{0\}\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}.}$$

3. La règle de d'ALEMBERT montre que la série proposée a un rayon égal à 1.
   - Soit $x\in]0,1[$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{x}}(\ln(1+\sqrt{x})-\ln(1-\sqrt{x}))\\&=\frac{\text{argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

   - Soit $x\in]-1,0[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(-x)^n}{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n+1}}{2n+1}=\frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\begin{cases}\frac{\operatorname{argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\text{ si }x\in]0,1[\\ 1\text{ si }x=0\\ \frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}\text{ si }x\in]-1,0[\end{cases}.}$$

4. La règle de d'ALEMBERT montre que la série proposée a un rayon égal à $+\infty$. Pour x réel,

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1-1}{(2n+1)!}x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^n.$$

• Si $x>0$,

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(\sqrt{x})-\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}(\sqrt{x})\right).$$

• Si $x<0$,

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(\sqrt{-x}\right)^{2n}-\frac{1}{2\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\left(\sqrt{-x}\right)^{2n+1}=\frac{1}{2}\left(\cos(\sqrt{-x})-\frac{1}{\sqrt{-x}}\sin(\sqrt{-x})\right).$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{nx^n}{(2n+1)!}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(\sqrt{x})-\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}(\sqrt{x})\right)\text{ si }x>0\\ 0\text{ si }x=0\\ \frac{1}{2}\left(\cos(\sqrt{-x})-\frac{1}{\sqrt{-x}}\sin(\sqrt{-x})\right)\text{ si }x<0\end{cases}.}$$

5. Immédiatement $R=+\infty$ et

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=\frac{1}{2}(\cos x+\operatorname{ch}x).}$$

6. $\operatorname{ch}n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e^n}{2}$ et donc $R=\frac{1}{e}$. Pour x dans $\left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\operatorname{ch}n)x^n=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(ex)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{e}\right)^n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ex}+\frac{1}{1-\frac{x}{e}}\right)=\frac{1}{2}\frac{2-\left(e+\frac{1}{e}\right)x}{x^2-\left(e+\frac{1}{e}\right)x+1}$$
$$=\frac{1-x\operatorname{ch}1}{x^2-2x\operatorname{ch}1+1}.$$

$$\boxed{\forall x\in\left]-\tfrac{1}{e},\tfrac{1}{e}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(\operatorname{ch}n)x^n=\frac{1-x\operatorname{ch}1}{x^2-2x\operatorname{ch}1+1}.}$$

7. La série proposée est le produit de CAUCHY des séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ qui sont toutes deux de rayon 1. Donc $R\geqslant 1$. Mais d'autre part, pour tout entier naturel non nul n, $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant 1$ et $R\leqslant 1$. Finalement $R=1$. De plus, pour x dans $]-1,1[$, $f(x)=\frac{1}{1-x}\times-\ln(1-x)=\frac{\ln(1-x)}{x-1}$.

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n=\frac{\ln(1-x)}{x-1}.}$$

8. La règle de d'ALEMBERT montre que le rayon de convergence est égal à $+\infty$.

Pour n entier naturel donné, $\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} = \frac{n^3+5n^2+3n-1}{(n+2)!}$ puis

$$\begin{aligned} n^3+5n^2+3n-1 &= (n+2)(n+1)n+2n^2+n-1 = (n+2)(n+1)n+2(n+2)(n+1)-5n-5 \\ &= (n+2)(n+1)n+2(n+2)(n+1)-5(n+2)+5 \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)n}{(n+2)!}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)!}x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{(n+2)!}x^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!}x^n.$$

Ensuite $f(0) = -\frac{1}{2}$ et pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!}x^n \\ &= xe^x + 2e^x - 5\frac{e^x-1}{x} + 5\frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{e^x(x^3+2x^2-5x+5)-5x}{x^2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}x^n = \begin{cases} \frac{e^x(x^3+2x^2-5x+5)-5x}{x^2} \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ -\frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}.}$$

9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leqslant a_n = n^{(-1)^n} \leqslant n$ et donc $R = 1$. Pour x dans $]-1,1[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \sum_{k=1}^{+\infty}(2k)x^k$. Puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(2k)x^k = 2x\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = 2x\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)' = 2x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^2}.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n}x^n = \operatorname{argth} x + \frac{2x}{(1-x)^2}.}$$

10. $R = 1$. Pour x réel non nul dans $]-1,1[$, $f(x) = -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x^4)^n}{n} = -\frac{\ln(1+x^4)}{4x}$ et sinon $f(0) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{4n} = \begin{cases} -\frac{\ln(1+x^4)}{4x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.}$$

11. La règle de d'ALEMBERT fournit $R = \frac{1}{2}$. Pour x dans $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n &= 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)(2x)^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(2x)^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right) \\ &= 2\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right)'' - 3\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right)' + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right) = 2\left(2\frac{1}{1-2x} - 3\frac{2}{(1-2x)^2} + \frac{4}{(1-2x)^3}\right) \\ &= 2\frac{2(1-2x)^2 - 6(1-2x) + 8}{(1-2x)^3} = 2\frac{8x^2+4x}{(1-2x)^3}. \end{aligned}$$

12. Pour $x=1$, la suite $((-1)^{n+1}nx^{2n+1})$ n'est pas bornée et donc $R\geqslant 1$. Mais la série converge si $|x|<1$ et $R\leqslant 1$. Finalement $R=1$.

Pour x dans $]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(2n+2)x^{2n+1}-2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+2}\right)'+2x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{-x^2}{1+x^2}\right)'+\frac{2x}{1+x^2}\right)\\&=-\frac{x(1+x^2)-x^3}{1+x^2)^2}+\frac{x}{1+x^2}=\frac{x^3}{1+x^2)^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}=\frac{x^3}{1+x^2)^2}.}$$

13. **1ère solution.** Les racines de l'équation caractéristique $z^2-z-1=0$ sont $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On sait qu'il existe deux nombres réels λ et μ tels que pour tout entier naturel n,

$$a_n=\lambda\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\mu\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Les égalités $n=0$ et $n=1$ fournissent

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=1\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\lambda+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\mu=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=1\\ \lambda-\mu=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\\ \mu=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \mu=-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Finalement, pour tout entier naturel n, $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

Les séries entières respectivement associées aux suites $\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$ et $\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$ ont pour rayons respectifs $\left|\frac{1}{(1+\sqrt{5})/2}\right|=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\left|\frac{1}{(1-\sqrt{5})/2}\right|=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ces rayons étant distincts, la série proposée a pour rayon

$$R=\mathrm{Min}\left\{\tfrac{\sqrt{5}-1}{2},\tfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}=\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Pour x dans $\left]-\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n&=\frac{\alpha}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha x)^n-\frac{\beta}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}(\beta x)^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha x}-\frac{\beta}{1-\beta x}\right)=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1}\\&=\frac{1}{1-x-x^2}.\end{aligned}$$

2ème solution. Supposons à priori le rayon R de la série proposée strictement positif. Pour x dans $]-R,R[$, on a

$$\begin{aligned}f(x)&=1+x+\sum_{n=2}^{+\infty}a_nx^n=1+x+\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+2}x^{n+2}=1+x+\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1}+a_n)x^{n+2}\\&=1+x+x\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^{n+1}+x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\text{ (les deux séries ont même rayon)}\\&=1+x+x(f(x)-1)+x^2f(x).\end{aligned}$$

Donc, nécessairement $\forall x \in]-R,R[,\ f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

Réciproquement, la fraction rationnelle ci-dessus n'admet pas 0 pour pôle et est donc développable en série entière. Le rayon de convergence de la série obtenue est le minimum des modules des pôles de f à savoir $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Notons $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ ce développement. Pour tout x de $]-R,R[$, on a $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)(1-x-x^2) = 1$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+2} = 1$ ce qui s'écrit encore $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1} x_n - \sum_{n=2}^{+\infty} b_{n-2} x^n = 1$. Finalement

$$\forall x \in]-R,R[,\ b_0 + (b_1 - b_0)x + \sum_{n=2}^{+\infty}(bn - b_{n-1} - b_{n-2})x^n = 1.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on a alors $b_0 = b_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2$, $b_n = b_{n-1} + bn - 2$. On en déduit alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n$.

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}.}$$

Remarque. En généralisant le travail précédent, on peut montrer que les suites associées aux développements en série entière des fractions rationnelles sont justement les suites vérifiant des relations de récurrence linéaire.

14. Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant a_n \leqslant n+1$. Donc $R = 1$.

On remarque que pour tout entier naturel n, $a_n = \sum_{k+5l=n} 1$. La série entière proposée est donc le produit de CAUCHY des séries $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ et $\sum_{l=0}^{+\infty} x^{5l}$. Pour x dans $]-1,1[$, on a donc

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} x^{5l}\right) = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{(1-x)^5}.$$

Remarque. De combien de façons peut -on payer 100 euros avec des pièces de 1, 2, 5, 10, 20 et 50 centimes d'euros, des pièces de 1 et 2 euros et des billets de 10 et 20 euros ? Soit N le nombre de solutions. N est le nombre de solutions en nombres entiers a,b,... de l'équation

$$a + 2b + 5c + 10d + 20e + 50f + 100g + 200h + 500k + 1000i + 2000j = 10000$$

et est donc le coefficient de x^{10000} du développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})(1-x^{50})(1-x^{100})(1-x^{200})(1-x^{500})(1-x^{1000})(1-x^{2000})},$$

La remarque est néanmoins anecdotique et il semble bien préférable de dénombrer à la main le nombre de solutions. Les exercices 19 et 20 de cette planche font bien mieux comprendre à quel point les séries entières sont un outil intéressant pour les dénombrements.

Correction de l'exercice 3 ▲

Dans chaque question, on note f la fonction considérée.

1. f est développable en série entière à l'origine en tant que fraction rationelle n'admettant pas 0 pour pôle. Le rayon du développement est le minimum des modules des pôles de f à savoir 1. Pour x dans $]-1,1[$,

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

2. f est développable en série entière à l'origine en tant que fraction rationelle n'admettant pas 0 pour pôle.

1er cas. Si $|t| < 1$, soit $\theta = \arccos t$. On a donc $\theta \in]0,\pi[$ et $t = \cos(\theta)$. Pour tout réel x, on a

$$x^2-2tx+1=x^2-2x\cos(\theta)+1=(x-e^{i\theta})(x-e^{-i\theta}),$$

avec $e^{i\theta}\neq e^{-i\theta}$. Les pôles sont de modules 1 et le rayon du développement est donc égal à 1. Pour x dans $]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-2x\cos(\theta)+1}&=\frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(\frac{1}{x-e^{i\theta}}-\frac{1}{x-e^{-i\theta}}\right)=\frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(-\frac{e^{-i\theta}}{1-xe^{-i\theta}}+\frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\right)\\&=\frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(e^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{in\theta}x^n-e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-in\theta}x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}x^n.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in]-1,1[,\ \forall x\in]-1,1[,\ \frac{1}{x^2-2xt+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}x^n \text{ où } \theta=\arccos t.}$$

2ème cas. Si $t>1$, on peut poser $t=\mathrm{ch}(\theta)$ où θ est un certain réel positif ou nul. Plus précisément, $\theta=\mathrm{argch}\,t=\ln(t+\sqrt{t^2-1})\in]0,+\infty[$. Pour tout réel x, on a

$$x^2-2tx+1=x^2-2x\,\mathrm{ch}(\theta)+1=(x-e^{\theta})(x-e^{-\theta}),$$

avec $e^{\theta}\neq e^{-\theta}$. Le minimum des modules des pôles de f est $e^{-\theta}=\frac{1}{t+\sqrt{t^2-1}}=t-\sqrt{t^2-1}$. Le rayon du développement est donc $R=t-\sqrt{t^2-1}$. Pour $x\in]-R,R[$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-2x\,\mathrm{ch}(\theta)+1}&=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}(\theta)}\left(\frac{1}{x-e^{\theta}}-\frac{1}{x-e^{-\theta}}\right)=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}(\theta)}\left(-\frac{e^{i\theta}}{1-xe^{-\theta}}+\frac{e^{\theta}}{1-xe^{\theta}}\right)\\&=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}(\theta)}\left(e^{\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{n\theta}x^n-e^{-\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n\theta}x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{sh}((n+1)\theta)}{\mathrm{sh}\,\theta}x^n.\end{aligned}$$

3ème cas. Si $t<-1$, on applique ce qui précède à $-t$ et $-x$.

4ème cas. Si $t=1$, pour $x\in]-1,1[$,

$$\frac{1}{x^2-2xt+1}=\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$$

Si $t=-1$, en remplaçant x par $-x$, on obtient pour $x\in]-1,1[$, $\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n$.

3. Pour tout réel x, $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ et donc si $x<2$, $x^2-5x+6>0$. Pour $x\in]-2,2[$,

$$\ln(x^2-5x+6)=\ln(2-x)+\ln(3-x)=\ln(6)+\ln\left(1-\tfrac{x}{2}\right)+\ln\left(1-\tfrac{x}{3}\right),$$

et puisque pour x dans $]-2,2[$, $\frac{x}{2}$ et $\frac{x}{3}$ sont dans $]-1,1[$,

$$\ln(x^2-5x+6)=\ln(6)-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n},$$

et en particulier la fonction f est développable en série entière et le rayon du développement est 2 clairement.

4. Si $\cos a=0$, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ et si $\cos a\neq 0$, f est définie et dérivable sur $\mathscr{D}=\left]-\infty,\frac{1}{\cos a}\right[\cup\left]\frac{1}{\cos a},+\infty\right[$. Pour $x\in\mathscr{D}$,

$$f'(x)=\sin a\times\frac{1}{(1-x\cos a)^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{x\sin a}{1-x\cos a}\right)^2}=\frac{\sin a}{x^2-2x\cos a+1}.$$

D'après 2), la fonction f' est dans tous les cas développable en série entière, le rayon du développement est 1 et pour x dans $]-1,1[$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)a)}{\sin a} x^n.$$

On sait alors que la fonction f est développable en série entière, que le développement a même rayon de convergence et s'obtient en intégrant terme à terme. Donc pour x dans $]-1,1[$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n+1)a)}{\sin a} x^{n+1}.$$

5. La fonction f est développable en série entière en tant que fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle. Le rayon est le minimum des modules des pôles de f à savoir 1.

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\ldots(x-p)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{x-k}$$

avec $\lambda_k = (-1)^{p-k}\frac{1}{(k-1)!(p-k)!} = (-1)^{p-k}\frac{k}{p!}C_p^k$. Par suite, pour x dans $]-1,1[$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k}\frac{k}{p!}C_p^k\left(-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{1-\frac{x}{k}} = \frac{(-1)^p}{p!}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}C_p^k\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{k^n}\right) \\ &= \frac{(-1)^p}{p!}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\frac{C_p^k}{k^n}\right)x^n. \end{aligned}$$

6. La fonction f est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et pour x dans $]-1,1[$, $f'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$ puis

$$f''(x) = 2x\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\arcsin x + \frac{2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}f'(x) + \frac{2}{1-x^2}.$$

Donc, pour x dans $]-1,1[$,

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2 \quad (1) \quad \text{et } f(0) = f'(0) = 0 \quad (2).$$

On admettra que ces égalités déterminent la fonction f de manière unique.

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon R supposé à priori strictement positif. Pour $x \in]-R,R[$, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (1) \text{ sur }]-R,R[&\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ (1-x^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = 2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = 2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n x^n = 2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n x^n = 2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n)x^n = 2 \\ &\Leftrightarrow a_2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n \text{ (par unicité des coefficients d'un DE} \end{aligned}$$

En résumé, la fonction g est solution de (1) et (2) sur $]-R,R[$ si et seulement si $a_0=a_1=0$ et $a_2=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_{n+2}=\frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n$ (3) puis

$$(3)\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ a_{2n+1}=0 \text{ et } a_0=0,\ a_2=1 \text{ et } \forall n\geqslant 2,\ a_{2n}=\frac{((2n-2)\times\ldots\times 4\times 2)^2}{(2n)\times(2n-1)\ldots\times 4\times 3}a_2$$
$$\Leftrightarrow a_0=0 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ a_{2n+1}=0 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_{2n}=\frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}$$

En résumé, sous l'hypothèse $R>0$, la fonction g est solution de (1) et (2) sur $]-R,R[$ si et seulement si $\forall x\in]-R,R[,\ g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n-1}}{n^2C_{2n}^n}x^{2n}$.

Réciproquement, calculons le rayon de la série entière précédente. Pour x réel non nul,

$$\left|\frac{2^{2n+1}(n!)^2x^{2n+2}}{(2n+2)!}\times\frac{(2n)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2x^{2n}}\right|=\frac{4x^2n^2}{(2n+2)(2n+1}\underset{n\to+\infty}{\to}x^2.$$

D'après la règle de d'ALEMBERT, la série proposée converge absolument pour $|x|<1$ et diverge grossièrement pour $|x|>1$. Le rayon de la série proposée est donc $1>0$ ce qui valide les calculs précédents.

Par unicité de la solution de (1) et (2) sur $]-1,1[$, f est développable en série entière et

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \arcsin^2 x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n-1}}{n^2C_{2n}^n}x^{2n}.}$$

7. Pour tout réel x, $\cos(x^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}$ (le rayon est infini). On sait alors que la fonction f est développable en série entière, que le rayon du développement est encore infini et que l'on peut intégrer terme à terme pour obtenir (en tenant compte de $f(0)=0$)

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)\times(2n)!}.}$$

8. Les zéros du polynôme t^4+t^2+1 sont j, j^2, $-j$ et $-j^2$. Donc la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^4+t^2+1}$ est développable en série entière en tant que fraction rationnelle n'admettant pas zéro pour pôle et que le rayon de la série obtenue est 1. Puis pour t dans $]-1,1[$,

$$\frac{1}{t^4+t^2+1}=\frac{1-t^2}{1-t^6}=(1-t^2)\sum_{n=0}^{+\infty}t^{6n}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^{6n}-\sum_{n=0}^{+\infty}t^{6n+2}=1-t^2+t^6-t^8+t^{12}-t^{14}+\ldots.$$

La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^4+t^2+1}$ est continue sur $]-\infty,0]$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $-\infty$. La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^4+t^2+1}$ est donc intégrable sur $]-\infty,0]$.

Par intégration terme à terme licite, on obtient pour x dans $]-1,1[$,

$$f(x)=\int_{-\infty}^0\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt+\int_0^x\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt=\int_{-\infty}^0\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t^{6n+1}}{6n+1}-\frac{t^{6n+3}}{6n+3}\right).$$

Calcul de $I=\int_{-\infty}^0\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt$. Par parité et réalité,

$$\frac{1}{t^4+t^2+1}=\frac{a}{t-j}+\frac{\overline{a}}{t-j^2}-\frac{a}{t+j}-\frac{\overline{a}}{t+j^2},$$

avec $a=\frac{1}{4j^3+2j}=\frac{1}{2(2+j)}=\frac{2+j^2}{2(2+j)(2+j^2)}=\frac{1-j}{6}$. Puis

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^4+t^2+1}&=\frac{1}{6}\left(\frac{1-j}{t-j}+\frac{1-j^2}{t-j^2}-\frac{1-j}{t+j}-\frac{1-j^2}{t+j^2}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{3t+3}{t^2+t+1}+\frac{-3t+3}{t^2-t+1}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{2t+1}{t^2+t+1}+\frac{1}{t^2+t+1}-\frac{2t-1}{t^2-t+1}+\frac{1}{t^2-t+1}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{2t+1}{t^2+t+1}+\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{2t-1}{t^2-t+1}+\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt=\frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\infty}^{0}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

En résumé,

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t^{6n+1}}{6n+1}-\frac{t^{6n+3}}{6n+3}\right).}$$

9. f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions développables en série entière sur $\mathbb{R}$. Pour x réel,

$$\begin{aligned}\cos x\operatorname{ch}x&=\frac{1}{4}\left(e^{(1+i)x}+e^{(1-i)x}+e^{(-1+i)x}+e^{(-1-i)x}\right)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((1+i)^n+(1-i)^n+(-1+i)^n+(-1-i)^n\right)\frac{x^n}{n!}\\&=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n+(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^n+(\sqrt{2}e^{3i\pi/4})^n+(\sqrt{2}e^{-3i\pi/4})^n\right)\frac{x^n}{n!}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}\\&=\frac{1}{4}\sum_{p=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^{2p}(-1)^p\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\frac{x^{2p}}{(2p)!}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^{4k}(-1)^{2k}\cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right)\frac{x^{4k}}{(4k)!}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k2^{2k-2}\frac{x^{4k}}{(4k)!}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \cos x\operatorname{ch}x=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k2^{2k-2}\frac{x^{4k}}{(4k)!}.}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Pour x réel non nul, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ ce qui reste vrai pour $x=0$. La fonction f est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et en particulier, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $R>0$. Notons D_R le disque fermé de centre 0 et de rayon R. Soient $z\in D_R$ et n un entier naturel.

$$|P_n(z)|=|e^z-(e^z-P_n(z))|\geqslant|e^z|-|e^z-P_n(z)|\geqslant e^{-R}-|e^z-P_n(z)|.$$

On sait que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction exponentielle sur D_R.Donc il existe un entier n_0 tel que pour tout $z\in D_R$ et tout entier $n\geqslant n_0$, $|e^z-P_n(z)|\leqslant\frac{1}{2}e^{-R}$. Pour $n\geqslant n_0$ et $z\in D_R$, $|P_n(z)|\geqslant\frac{1}{2}e^{-R}>0$ et P_n ne s'annule pas dans D_R.

Correction de l'exercice 6 ▲

On cherche une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ de rayon R strictement positif telle que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n^xn\right)=1$ pour x élément d'un certain intervalle ouvert non vide de centre 0.

Cette égalité impose à la suite (b_n) de vérifier le système d'équations $\begin{cases} a_0b_0=1\\ a_0b_1+a_1b_0=0\\ a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=0\\ \vdots\\ a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_0=1\\ \vdots \end{cases}$

1. Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, b_n existe et est unique.

   • Puisque $a_0=1$, $a_0b_0=1\Leftrightarrow b_0=1$. Ceci montre l'existence et l'unicité de b_0.

   • Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons avoir démontré l'existence et l'unicité de b_0, b_1, …, b_n.

   Alors $a_0b_{n+1}+a_1b_n+\ldots+a_nb_1+a_{n+1}b_0=0\Leftrightarrow b_{n+1}=-a_1b_n-\ldots-a_nb_1-a_{n+1}b_0$. Ceci montre l'existence

   et l'unicité de b_{n+1}.

   On a montré par récurrence que la suite (b_n) existe et est unique.

2. Il faut alors vérifier que la série entière associée à la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un rayon de convergence strictement positif .

   Soit $R>0$ le rayon de la série associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit r un réel tel que $0<r<R$.

   On sait que la suite $(a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et il existe $M>0$ tel que pour tout entier naturel n, $|a_n|\leqslant\frac{M}{r^n}$.

   $b_0=1$ puis $|b_1|=|-a_1b_0|\leqslant\frac{M}{r}$ puis $|b_2|=|-a_2b_0-a_1b_1|\leqslant\frac{M}{r^2}+\frac{M}{r}\times\frac{M}{r}=\frac{M(M+1)}{r^2}$ puis

   $$|b_3|=|-a_3b_0-a_2b_1-a_1b_2|\leqslant\frac{M}{r^3}+\frac{M}{r^2}\times+\frac{M}{r}+\frac{M}{r}\times\frac{M(M+1)}{r^2}=\frac{M(M^2+2M+1)}{r^3}=\frac{M(M+1)^2}{r^3}.$$

   Montrons alors par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n|\leqslant\frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$.

   • C'est vrai pour $n=1$.

   • Soit $n\geqslant1$, supposons que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $|b_k|\leqslant\frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$. Alors

   $$\begin{aligned}|b_{n+1}|&\leqslant|-a_{n+1}b_0|+|-a_nb_1|+\ldots+|-a_1b_n|\leqslant\frac{M}{r^{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}\times\frac{M}{r^{n+1-k}}\\&=\frac{M}{r^{n+1}}\left(1+M\sum_{k=1}^{n}(M+1)^{k-1}\right)=\frac{M}{r^{n+1}}\left(1+M\frac{(M+1)^n-1}{(M+1)-1}\right)=\frac{M(M+1)^n}{r^{n+1}}.\end{aligned}$$

   On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $|b_n|\leqslant\frac{M(M+1)^n}{r^{n+1}}$. En particulier , le rayon R' de la série entière associée à la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $R'\geqslant\frac{r}{M+1}>0$. Ceci valide les calculs initiaux sur $]-\rho,\rho[$ où $\rho=\text{Min}(R,R')>0$ et donc l'inverse d'une fonction f développable en série entière à l'origine et telle que $f(0)\neq0$ est développable en série entière à l'origine.

Correction de l'exercice 7 ▲

On a déjà vu que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et la règle de d'ALEMBERT fournit $R=1$. Soit $x\in]-1,1[$.
Pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et tout entier naturel n, $|x^n\cos^n t|\leqslant|x|^n$. Comme la série numérique de terme général $|x|^n$, $n\in\mathbb{N}$, converge, la série de fonctions de terme général $t\mapsto x^n cos^n t$ est normalement et donc uniformément convergente sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}W_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}x^n\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt = \int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\cos^n t\right)dt = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-x\cos t}\,dt\\ &= \int_0^1\frac{1}{1-x\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2}\ (\text{en posant } u=\tan\left(\frac{t}{2}\right))\\ &= 2\int_0^1\frac{1}{(1+x)u^2+(1-x)}\,du = 2\times\frac{1}{1+x}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\left[\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right)\right]_0^1\\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}W_n x^n=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Pour tout entier naturel non nul, $|a_n|\leqslant\frac{1}{n}$ et donc $R\geqslant 1$. Mais si $x>1$, la suite $\left(\frac{1}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n\right)_{n\geqslant 1}$ n'est pas bornée comme on le voit en considérant la suite extraite des termes d'indices multiples de 3 et donc $R=1$.
Pour x dans $]-1,1[$, $f(x)=\text{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(jx)^n}{n}\right)$. Le problème est alors de ne pouvoir écrire $-\ln(1-jx)$. Il faut s'y prendre autrement.
f est donc dérivable sur $]-1,1[$ et pour x dans $]-1;1[$,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^{n-1}=\text{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}j^n x^{n-1}\right)=\text{Re}\left(\frac{j}{1-jx}\right)=\text{Re}\left(\frac{j(1-j^2x)}{x^2+x+1}\right)=-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Par suite, pour $x\in]-1,1[$, $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$.

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n=-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1).}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Le rayon de la série considérée est égal 1. Soit $x\in]-1,1[$.

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)x^n=\frac{1}{2}\left(-1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right).$$

• Si x est dans $]0,1[$,

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\left(-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(-1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(-1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\right).\end{aligned}$$

• Si x est dans $]-1,0[$,

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(-1-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n+1}}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(-1-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\arctan(\sqrt{-x})\right).$$

• $f(0)=-1$.

Maintenant, la somme est en fait définie sur $[-1,1]$ car les séries numériques de termes généraux $\frac{1}{4n^2-1}$ et $\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ convergent. Vérifions que la somme est continue sur $[-1,1]$.

Pour x dans $[-1,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\frac{x^n}{4n^2-1}\right|\leqslant\frac{1}{4n^2-1}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente. La série entière considérée converge donc normalement sur $[-1,1]$. On en déduit que cette somme est continue sur $[-1,1]$. Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=f(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{2}\left(-1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})\ln(1-\sqrt{x})\right)$$
$$=-\frac{1}{2}$$

Remarque. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2n+1}\right)\right)=-\frac{1}{2}$ (série télescopique).

On a aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}=f(-1)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{1}{2}\left(-1-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\arctan(\sqrt{-x})\right)$$
$$=\frac{1}{2}(-1-2\arctan 1)=-\frac{\pi+2}{4}.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Pour tout entier naturel n, $|a_n|\geqslant\frac{1}{2n+1}$ et donc la série proposée ne converge pas absolument.

Pour tout entier naturel n,

$$|u_n|-|u_{n+1}|=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{2n+3}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{4k+1}=\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{2n+3}\times\frac{1}{4n+5}$$
$$=\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{(2n+3)(4n+5)}\geqslant\frac{1}{(2n+3)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+3)(4n+5)}>0.$$

La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. De plus, pour tout entier naturel non nul n,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{4n+1}\frac{1}{k}\leqslant1+\sum_{k=2}^{4n+1}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,dt=1+\ln(4n+1)$$

et donc $|u_n|\leqslant\frac{1+\ln(4n+1)}{2n+1}$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. Finalement, la série proposée converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Considérons la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^{2n+1}$. La série de terme général a_n converge et donc $R\geqslant1$ mais puisque la série de terme général $|a_n|$ diverge et donc $R\leqslant1$. Finalement, $R=1$. Pour $x\in]-1,1[$, posons $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^{2n+1}$. Pour x dans $]-1,1[$,

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\right)x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\right)(-x^2)^n$$
$$=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{4n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n\right)\text{ (produit de CAUCHY de deux séries numériques absolument convergentes)}$$

Donc, pour x dans $]0,1[$, $f'(x)=g(x)h(x)$ où $h(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}$ puis

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}(\sqrt{x})^{4n+1}.$$

Maintenant, en posant $k(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nX^{4n+1}$ pour X dans $]-1,1[$, $k'(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nX^{4n}=\frac{1}{X^4+1}$. Ensuite, en posant $\omega=e^{i\pi/4}$, par réalité et parité

$$\frac{1}{X^4+1}=\frac{a}{X-\omega}+\frac{\overline{a}}{X-\overline{\omega}}-\frac{a}{X+\omega}-\frac{\overline{a}}{X+\overline{\omega}}$$

où $a=\frac{1}{4\omega^3}=-\frac{\omega}{4}$. Il vient alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{X^4+1}&=-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{X-\omega}+\frac{\overline{\omega}}{X-\overline{\omega}}-\frac{\omega}{X+\omega}-\frac{\overline{\omega}}{X+\overline{\omega}}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{X\sqrt{2}-2}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{X\sqrt{2}+2}{X^2+\sqrt{2}X+1}\right)\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2X+2\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1}-\frac{2X-2\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}\right)\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\frac{\sqrt{2}}{\left(X+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{\sqrt{2}}{\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)\end{aligned}$$

En tenant compte de $k(0)=0$, on obtient donc pour $X\in]-1,1[$,

$$k(X)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln(X^2+X\sqrt{2}+1)-\ln(X^2-X\sqrt{2}+1))+2\left(\arctan(X\sqrt{2}+1)+\arctan(X\sqrt{2}-1)\right)\right).$$

Ensuite, pour tout réel $x\in]0,1[$, $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}k(\sqrt{x})\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}k'(\sqrt{x})k(\sqrt{x})$ et donc

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\left(k\left(\sqrt{x}\right)^2-k(0)^2\right)=k\left(\sqrt{x}\right)^2\\&=\frac{1}{32}\left(\ln(X^2+X\sqrt{2}+1)-\ln(X^2-X\sqrt{2}+1))+2\left(\arctan(X\sqrt{2}+1)+\arctan(X\sqrt{2}-1)\right)\right)^2.\end{aligned}$$

Quand x tend vers 1, $f(x)$ tend vers

$$\frac{1}{32}\left(\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)+2(\arctan(\sqrt{2}+1)+\arctan(\sqrt{2}-1))\right)^2=\frac{1}{32}\left(\ln(3+2\sqrt{2})+\pi\right)^2.$$

(car $\arctan(\sqrt{2}+1)+\arctan(\sqrt{2}-1)=\arctan(\sqrt{2}+1)+\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=\frac{\pi}{2}$).
Enfin, pour x dans $[0,1]$ et n dans $\mathbb{N}$, $|u_n|x^n-|u_{n+1}|x^{n+1}\geqslant(|u_n|-|u_{n+1}|)x^n\geqslant 0$ et la série numérique de terme général u_nx^n est alternée. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une telle série, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1]$,

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_kx^k\right|\leqslant\left|u_{n+1}x^{n+1}\right|\leqslant|u_{n+1}|,$$

et donc $\underset{x\in[0,1]}{\text{Sup}}|R_n(x)|\leqslant|a_{n+1}|\underset{n\to+\infty}{\to}0$. La convergence est uniforme sur $[0,1]$ et on en déduit que la somme est continue sur $[0,1]$. En particulier

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=f(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\frac{1}{32}\left(\ln(3+2\sqrt{2})+\pi\right)^2.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\right)=\frac{1}{32}\left(\ln(3+2\sqrt{2})+\pi\right)^2.}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Posons $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}A=(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$. On sait que pour tout entier naturel n, $\mathrm{Tr}(A^n)=\lambda_1^n+\dots+\lambda_p^n$.
Soit λ un nombre complexe.
• Si $\lambda=0$, la série entière associée à la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de rayon infini et pour tout nombre complexe z, $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n z^n=1=\frac{1}{1-\lambda z}$.
• Si $\lambda\neq 0$, la série entière associée à la suite (λ^n) est de rayon $\frac{1}{|\lambda|}$ et pour $|z|<\frac{1}{|\lambda|}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n z^n=\frac{1}{1-\lambda z}$.
Soit $\rho=\mathrm{Max}(|\lambda_1|,\dots,|\lambda_p|)$ (ρ est le rayon spectral de la matrice A) et $R=\frac{1}{\rho}$ si $\rho\neq 0$ et $R=+\infty$ si $\rho=0$.
Pour $|z|<R$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Tr}(A^n)z^n&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k z)^n\right)=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda_k z)^n\right)\ \text{(somme de } p \text{ séries convergentes)}\\&=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{1-\lambda_k z}.\end{aligned}$$

Il est alors clair que R est le rayon de convergence de la série entière proposée (développement en série entière d'une fraction rationnelle).
Si de plus, $0<|z|<R$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Tr}(A^n)z^n=\frac{1}{z}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\frac{1}{z}-\lambda_k}\right)=\frac{\chi_A'\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{1}{z}\chi_A\left(\frac{1}{z}\right)}$ (décomposition usuelle de $\frac{P'}{P}$).

Correction de l'exercice 12 ▲

Pour x réel, on sait que $F(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\right)$.
La fonction F est impaire donc les coefficients d'indices pairs sont nuls. D'autre part, pour $n\in\mathbb{N}$, le coefficient de x^{2n+1} du produit de Cauchy des deux séries précédentes vaut

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(2k+1)}\times\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

La méthode choisie fournit classiquement une expression compliquée des coefficients.
On peut aussi obtenir F comme solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x)=-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt+1=-2xF(x)+1$.
F est uniquement déterminée par les conditions $F'+2xF=1$ et $F(0)=0$ (*). F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ d'après le début de l'exercice et impaire. Pour x réel, posons donc $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{2n+1}$.

$$\begin{aligned}(*)&\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n}+2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{2n+2}=1\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}((2n+1)a_n+2a_{n-1})x^{2n}=1\\&\Leftrightarrow a_0=1\text{ et }\forall n\geqslant 1,\ (2n+1)a_n+2a_{n-1}=0\Leftrightarrow a_0=1\text{ et }\forall n\geqslant 1,\ a_n=-\frac{2}{2n+1}a_{n-1}\\&a_0=1\text{ et }\forall n\geqslant 1,\ a_n=\frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)(2n-1)\dots 1}a_0\\&\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{(-1)^n 2^{2n}n!}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

On a montré que pour tout réel x, $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. Par unicité des coefficients d'une série entière, $\forall n\in\mathbb{N}$, on obtient en particulier,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(2k+1)}\times\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{(-1)^n 2^{2n}n!}{(2n+1)!}.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

Pour tout entier naturel n, $a_{n+1}+b_{n+1}=2(a_n+b_n)$ et $3a_{n+1}+2b_{n+1}=3a_n+2b_n$ (rappel : ces combinaisons linéaires sont fournies par les vecteurs propres de ${}^tA$ si on ne les devine pas). On en déduit que pour tout entier naturel n, $a_n+b_n=2^n(a_0+b_0)=2^n$ et $3a_n+2b_n=3a_0+2b_0=3$. Finalement,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=3-2^{n+1}\text{ et }b_n=3(2^n-1).$$

Les deux séries proposées sont alors clairement de rayons infini et pour tout réel x, $f(x)=3e^x-2e^{2x}$ et $g(x)=3(e^{2x}-e^x)$. (On peut avoir d'autres idées de résolution, plus astucieuses, mais au bout du compte moins performantes).

Correction de l'exercice 14 ▲

Pour $n\geqslant 1$, posons $a_n=\frac{1}{nC_{2n}^n}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n}{n+1}\times\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\times\frac{(n+1)!^2}{n!^2}=\frac{n}{2(2n+1)}\quad(*).$$

Par suite, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{1}{4}$ et d'après la règle de d'ALEMBERT, le rayon de la série entière considérée est $R=4$.
Pour $x\in]-4,4[$, posons $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$.
Les relations $(*)$ s'écrivent encore $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 4(n+1)a_{n+1}-2a_{n+1}=na_n$.
Soit $x\in]-4,4[$. On multiplie les deux membres de l'égalité précédente par x^{n+1} et on somme sur n. On obtient

$$4x\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-2\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n+1}x^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1},$$

ou encore $x^2f'(x)=4x(f'(x)-a_1)-2(f(x)-a_1x)$ ou encore $x(x-4)f'(x)+2f(x)=-x\quad(E)$. Soit I l'un des deux intervalles $]-4,0[$ ou $]0,4[$.Sur I, l'équation (E) s'écrit :

$$f'(x)+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{x-4}\right)f(x)=-\tfrac{1}{x-4}.$$

Une primitive sur I de la fonction $a:x\mapsto\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-4}\right)$ est la fonction $A:x\mapsto\frac{1}{2}(\ln|x-4|-\ln|x|)=\ln\sqrt{\frac{|x-4|}{|x|}}$.

$$\begin{aligned}f\text{ solution de }(E)\text{ sur }I&\Leftrightarrow\forall x\in I,\ f'(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-4}\right)f(x)=-\frac{1}{x-4}\\&\Leftrightarrow\forall x\in I,\ e^{A(x)}f'(x)+a(x)e^{A(x)}f(x)=\frac{1}{4-x}\sqrt{\frac{|x-4|}{|x|}}\\&\Leftrightarrow\forall x\in I,\ (e^Af)'(x)=\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}\quad(*).\end{aligned}$$

Déterminons une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}$ sur I.
• Si $I=]0,4[$, $\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}=\frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}=\frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$ et une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}$ sur I est la fonction $x\mapsto\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)$. Puis

$$\begin{aligned}f\text{ solution de }(E)\text{ sur }I&\Leftrightarrow\exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ e^{A(x)}f(x)=\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+C\\&\Leftrightarrow\exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ f(x)=\sqrt{\frac{x}{4-x}}\left(\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+C\right).\end{aligned}$$

• Si $I=]-4,0[$, $\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}=\frac{1}{\sqrt{x(x-4)}}=\frac{1}{\sqrt{(2-x)^2-4}}$ et une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}$ sur I est la fonction $x\mapsto-\operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right)$. Puis

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \Leftrightarrow \exists C' \in \mathbb{R} / \ \forall x \in I,\ e^{A(x)} f(x) = \operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right) + C'$$
$$\Leftrightarrow \exists C' \in \mathbb{R} / \ \forall x \in I,\ f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-4}}\left(-\operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right) + C'\right).$$

f doit être définie, continue et dérivable sur $]-4,4[$ et en particulier dérivable en 0. Ceci impose $\lim_{x\to 0^+} \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C = 0$ (car sinon $f(x) \underset{0^+}{\sim} C\sqrt{x}$) et donc $C = \frac{\pi}{2}$. Pour $x \in]0,4[$, on a alors $f(x) = \sqrt{\frac{x}{4-x}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2-x}{2}\right)\right) = \sqrt{\frac{x}{4-x}} \arccos\left(\frac{2-x}{2}\right)$ ce qui reste vrai pour $x = 0$ par continuité..
De même, $\lim_{x\to 0^-} -\operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right) + C' = 0$ et donc $C' = 0$. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in]-4,4[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nC_{2n}^n} x^n = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{4-x}} \arccos\left(\frac{2-x}{2}\right) & \text{si } x \in [0,4[\\ -\sqrt{\frac{x}{x-4}} \operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right) & \text{si } x \in]-4,0] \end{cases}.}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Soient A et B les sommes des séries entières associées aux suites a et b sur $]-1,1[$. La fonction B est strictement positive sur $]0,1[$ et en particulier ne s'annule pas sur $]0,1[$.

   • La suite a est positive donc la fonction A est croissante sur $[0,1[$ et admet ainsi une limite réelle ou infinie quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. De plus, pour N entier naturel donné et $x \in [0,1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ et donc

   $$\forall N \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to 1,\, x<1} A(x) \geqslant \lim_{x\to 1,\, x<1} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

   Puisque la série de terme général positif a_n diverge, quand N tend tend vers $+\infty$, on obtient $\lim_{x\to 1,\, x<1} A(x) \geqslant +\infty$ et donc $\lim_{x\to 1,\, x<1} A(x) = +\infty$. Il en est de même pour B car la série de terme général b_n diverge quelque soit la valeur de k.

   • On veut alors montrer que $A - kB \underset{x\to 1^-}{=} o(B)$.

   Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $a_n - kb_n \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$ et donc il existe un entier naturel N tel que pour $n \geqslant N$, $|a_n - kb_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} b_n$.
   Soit $x \in [0,1[$.

   $$|A(x) - kB(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n - kb_n| x^n \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - kb_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - kb_n| + \frac{\varepsilon}{2} B(x).$$

   Maintenant, $B(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Donc il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que pour $x \in]1-\alpha,1[$, $B(x) > \frac{2}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{N} |a_n - kb_n|$. Pour $x \in]1-\alpha,1[$, on a alors $|A(x) - kB(x)| < \frac{\varepsilon}{2} B(x) + \frac{\varepsilon}{2} B(x) = \varepsilon B(x)$.

   On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha \in]0,1[/ \ \forall x \in]1-\alpha,1[,\ |A(x) - kB(x)| < \varepsilon B(x)$ et donc $\lim_{x\to 1^-} \frac{A(x)}{B(x)} = k$.

2. (a) La série entière proposée vérifie les hypothèses du 1) et de plus , $\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Donc

   $$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}.}$$

(b) Soit $p \geqslant 2$. $n^{p-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)(n+2)...(n+p-1)$. Comme les deux suites (n^{p-1}) et $((n+1)(n+2)...(n+p-1))$ vérifient les hypothèses du 1)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1}x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty}(n+p-1)...(n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)^{(p-1)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(p-1)} = \frac{(p-1)!}{(1-x)^p}.$$

Par suite,

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-}(1-x)^p\sum_{n=1}^{+\infty}n^{p-1}x^n = (p-1)!.}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

Supposons qu'il existe un entier naturel p tel que $a_p = a_{p+1}$. Le développement limité à l'ordre 1 de $f^{(p)}$ en 0 s'écrit $f^{(p)}(x) \underset{x\to 0}{=} f^{(p)}(0) + xf^{(p+1)}(0) + o(x) = a_p(1+x) + o(x)$ et on en déduit

$$\begin{aligned}|f^{(p)}(x)| &\geqslant |a_p(1+x)| - |o(x)| = 1 + x - |o(x)| \geqslant 1 + x - \frac{x}{2} \text{ (sur un voisinage pointé de 0 à droite)}\\ &= 1 + \frac{x}{2} > 1 \text{ (sur un voisinage pointé de 0 à droite).}\end{aligned}$$

Donc si deux termes consécutifs sont égaux, f nne vérifie pas les conditions de l'énoncé ou encore si f vérifie les conditions de l'énoncé, alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{p+1} = -a_p$ puis $a_p = (-1)^p a_0$. Mais alors, nécessairement pour tout réel x, $f(x) = e^{-x}$ ou pour tout réel x, $f(x) = -e^{-x}$.
Réciproquement, ces deux fonctions sont clairement solutions du problème posé.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. La fonction f est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et de plus $f' = 1 + f^2$.

   Montrons par récurrence que pour tout naturel n, il existe un polynôme P_n à coefficients entiers naturels tel que $f^{(n)} = P_n \circ f$ (ou encore $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$).

   • C'est vrai pour $n = 0$ avec $P_0 = X$ et pour $n = 1$ avec $P_1 = 1 + X^2$.

   • Soit $n \geqslant 1$. Supposons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe un polynôme P_k à coefficients entiers naturels tel que $f^{(k)} = P_k \circ f$. D'après la formule de LEIBNIZ,

$$f^{(n+1)} = (1+f^2)^{(n)} = (f^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}f^{(n-k)} = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_kP_{n-k}\right)\circ f$$

   et le polynôme $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_kP_{n-k}$ est un polynôme à coefficients entiers naturels tel que $\tan^{(n+1)} = P_{n+1} \circ f$.

   Remarque. On aurait pu aussi dériver l'égalité $f^{(n)} = P_n \circ f$ pour obtenir $f^{(n+1)} = f' \times P_n' \circ f = (P_1 \times P_n') \circ f$ mais on a déjà dans l'idée une relation de récurrence sur les coefficients du développement de tan qui n'est pas fournie par cette dernière égalité.

2. Soient $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$. La formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre n en 0 fournit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Le 1) montre que pour tout réel t de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et tout entier naturel k, $f^{(k)}(t)=P_k(\tan t)\geqslant 0$.

Donc, d'une part $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\geqslant 0$ et d'autre part,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=f(x)-\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\geqslant 0$ est majorée et donc la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge.

Ainsi, la série de TAYLOR de f à l'origine converge pour tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$ (et donc la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge aussi pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right]$). Il n'y a par contre aucune raison pour le moment pour que sa somme soit f.

3. Pour n entier naturel donné, posons $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ puis pour x dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, posons $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx_n$.

On a vu que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}P_kP_{n-k}$. On divise les deux membres de ces égalités par $n!$ et on prend la valeur en 0 ($=\tan 0$). On obtient

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (n+1)a_{n+1}=a_ka_{n-k}\text{ et aussi }a_0=0\text{ et }a_1=1.$$

Donc, pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n=1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n=1+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)^2\\&=1+g^2(x).\end{aligned}$$

De plus, $g(0)=a_0=0$.

Pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, posons alors $h(x)=\arctan(g(x))$. La fonction h est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$h'(x)=\frac{g'(x)}{1+g^2(x)}=1\text{ puis }h(x)=h(0)+(x-0)=x.$$

Ainsi, pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x)=\tan x=f(x)$. Ceci montre déjà que f est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Mais quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures, $g(x)=f(x)$ tend vers $+\infty$ et donc $R\leqslant\frac{\pi}{2}$ puis $R=\frac{\pi}{2}$.

En résumé, la fonction tangente est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ où $a_0=0$, $a_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(n+1)a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$. De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{2n}=0$ puisque la fonction tangente est impaire.

4. $a_0=a_2=a_4=a_6=0$ puis $a_1=1$.

$3a_3=a_0a_2+a_1^2+a_2a_0=1$ et donc $a_3=\frac{1}{3}$.

$5a_5=2a_1a_3=\frac{2}{3}$ et donc $a_5=\frac{2}{15}$.

$7a_7=2a_1a_5+a_3^2=\frac{4}{15}+\frac{1}{9}=\frac{51}{135}=\frac{17}{45}$ et $a_7=\frac{17}{315}$.

$$\boxed{\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan x=x+\frac{x^3}{2}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots}$$

5. Pour tout réel x, $\text{th}(x)=\frac{1}{x}\tan(ix)$ et donc pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\text{th}(x) = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}(ix)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_{2n+1}x^{2n+1}.$$

Cette série entière a aussi pour rayon de convergence $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 18 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}\sin(tx)$ est continue sur $[0,+\infty[$, négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$ et est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel t, posons $f(t) = e^{-t^2}\sin(tx)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{-t^2}\sin(tx) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}t^{2n+1}e^{-t^2}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, posons $f_n(t) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}t^{2n+1}e^{-t^2}$.
• Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue puis intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
• La série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $[0,+\infty[$.
• Ensuite, $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty}t^{2n+1}e^{-t^2}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \int_0^{+\infty}t^{2n+1}e^{-t^2}\,dt$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A un réel strictement positif. Les deux fonctions $t \mapsto t^{2n}$ et $t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^A t^{2n+1}e^{-t^2}\,dt &= \int_0^A t^{2n}\times te^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}t^{2n}e^{-t^2}\right]_0^A + n\int_0^A t^{2n-1}e^{-t^2}\,dt\\ &= -\frac{1}{2}A^{2n}e^{-A^2} + n\int_0^A t^{2n-1}e^{-t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $I_n = nI_{n-1}$. En tenant compte, de $I_0 = \int_0^{+\infty}te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}$ on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{n!}{2}$ puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. $\left|\frac{\frac{(n+1)!|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = \frac{(n+1)x^2}{(2n+3)(2n+2)}$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)!|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}} = 0$. D'après la règle de d'ALEMBERT, la série numérique de terme général $\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge.
En résumé, pour tout réel x,
• Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue puis intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
• La série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $[0,+\infty[$.
• $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,dt < +\infty$.
D'après un théorème d'intégration terme à terme, pour tout réel x,

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(tx)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n+1}}{2(2n+1)!}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(tx)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n+1}}{2(2n+1)!}.}$$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n}}{2(2n)!} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!x^{2n-1}}{(2(2n-1)!} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}F(x).$$

Par suite, pour tout réel x, $e^{x^2/4}F'(x) + \frac{x}{2}e^{x^2/4}F(x) = \frac{e^{x^2/4}}{2}$ et donc

$$F(x)=F(0)+\frac{e^{-x^2/4}}{2}\int_0^x e^{t^2/4}\,dt=\frac{e^{-x^2/4}}{2}\int_0^x e^{t^2/4}\,dt.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(tx)\,dt=\frac{e^{-x^2/4}}{2}\int_0^x e^{t^2/4}\,dt.}$$

Correction de l'exercice 19 ▲

On a $I_0=0$, $I_1=1$ et $I_2=2$ (l'identité et la transposition $\tau_{1,2}$).
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Il y a I_{n+1} involutions σ de $[\![1,n+2]\!]$ vérifiant $\sigma(n+2)=n+2$ car la restriction d'une telle permutation à $[\![1,n+1]\!]$ est une involution de $[\![1,n+1]\!]$ et réciproquement.
Si $\sigma(n+2)=k\in[\![1,n+1]\!]$, nécessairement $\sigma(k)=n+2$ puis la restriction de σ à $[\![1,n+2]\!]\setminus\{k,n+2\}$ est une involution et réciproquement Il y a I_n involutions de $[\![1,n+2]\!]\setminus\{k,n+2\}$ et $n+1$ choix possibles de k et donc $(n+1)I_n$ involutions de $[\![1,n+2]\!]$ telles que $\sigma(n+2)\neq n+2$. En résumé,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_{n+2}=I_{n+1}+(n+1)I_n.$$

Le rayon R de la série entière associée à la suite $\left(\frac{I_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est supérieur ou égal à 1 car $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{I_n}{n!}\leqslant 1$. Pour x dans $]-R,R[$, posons $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n$. f est dérivable sur $]-R,R[$ et pour $x\in]-R,R[$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n}{(n-1)!}x^{n-1}=1+2x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_{n+2}}{(n+1)!}x^{n+1}=1+2x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_{n+1}+(n+1)I_n}{(n+1)!}x^{n+1}\\&=1+2x+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n+x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n\\&=1+2x+f(x)-x+xf(x)=1+x+(x+1)f(x).\end{aligned}$$

Donc, pour $x\in]-R,R[$, $f'(x)+(x+1)f(x)=x+1$ ou encore $e^{\frac{x^2}{2}+x}f'(x)+(x+1)e^{\frac{x^2}{2}+x}f(x)=(x+1)e^{\frac{x^2}{2}+x}$.
Par suite, pour $x\in]-R,R[$,

$$e^{\frac{x^2}{2}+x}f(x)-f(0)=\int_0^x(t+1)e^{\frac{t^2}{2}+t}\,dt=e^{\frac{x^2}{2}+x}-1,$$

et puisque $f(0)=0$, $\forall x\in]-R,R[$, $f(x)=e^{\frac{x^2}{2}+x}-1$.
Réciproquement, la fonction précédente est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux ($=e^{\frac{x^2}{2}}\times e^x$) et les coefficients de ce développement vérifient les relations définissant $\frac{I_n}{n!}$ de manière unique. Donc, ces coefficients sont les $\frac{I_n}{n!}$ ce qui montre que $R=+\infty$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n=e^{\frac{x^2}{2}+x}-1.}$$

Correction de l'exercice 20 ▲

1. Soient $n\geqslant 2$ puis $k\in[\![1,n-1]\!]$. On met une parenthèse autour de $X_1\ldots X_k$ et une autour de $X_{k+1}\ldots X_n$. Ensuite, pour chacun des a_k parenthésages de $X1\ldots X_k$, il y a a_{n-k} parenthésages possibles de $X_{k+1}\ldots X_n$. Finalement, en faisant varier k de 1 à $n-1$, on a montré que

$$\boxed{\forall n\geqslant 2,\ a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}.}$$

2. On suppose momentanément le rayon R de la série entière associé à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement positif. On pose conventionnellement $a_0=0$. Pour $x\in]-R,R[$,

$$f^2(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}\right)x^n=\sum_{n=2}^{+\infty}a_nx^n=f(x)-x,$$

et donc

$$\boxed{\forall x\in]-R,R[,\ f^2(x)=f(x)-x.}$$

3. Nécessairement, pour tout x de $]-R,R[$, $f(x)=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4x})$ (I) ou $f(x)=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x})$ (II). Ainsi, pour chaque $x\in]-R,R[$, on doit choisir l'une de ces deux expressions. Puisque $f(0)=0$, il faut choisir l'expression (II) quand $x=0$.

   Pour $x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$, posons $g(x)=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x})$. g est développable en série entière sur $\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$ en vertu de théorèmes généraux. Notons $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement. Puisque $g(0)=0$, on a $b_0=0=a_0$ et puisque $g'(0)=1$, on a $b_1=1=a_1$. Enfin, la fonction g vérifie $\forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$, $g^2(x)=g(x)-x$ et donc $\forall n\geqslant 2$, $b_n=\sum_{k=1}^{n-1}b_kb_{n-k}$. On en déduit par récurrence que pour tout entier naturel n, $b_n=a_n$ et donc $\forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$, $f(x)=g(x)$.

$$\boxed{\forall x\in\left]-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}\right[,\ f(x)=\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x}).}$$

4. Pour connaitre les a_n, il reste à développer la fonction g en série entière. Pour $x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$,

$$g(x)=\tfrac{1}{2}(1-(1-4x)^{1/2})=\tfrac{1}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{+\infty}C_{1/2}^n(-4x)^n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}C_{1/2}^n2^{2n-1}x^n.$$

   Enfin, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}C_{1/2}^n2^{2n-1}&=(-1)^{n-1}\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-1\right)\times\ldots\times\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}2^{2n-1}=\frac{2^{n-1}}{n!}\times1\times3\times....\times(2n-3)\\&=\frac{2^{n-1}}{n!}\times\frac{1\times2\times3\times....\times(2n-3)\times(2n-2)}{2\times4\times\ldots\times(2n-2)}=\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}=\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

   Donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\tfrac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}.}$$