# Dualité

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile  ** facile  *** difficulté moyenne  **** difficile  ***** très difficile
I : Incontournable

Dans les corrigés qui suivent, on ne suppose pas connue la notion d'orthogonalité au sens de la dualité.

**Exercice 1** **I

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit l'application $\varphi_a$ par : $\forall P \in E,\ \varphi_a(P) = P(a)$. Montrer que pour tout $a \in E$, $\varphi_a \in E^*$.
2. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille $(\varphi_{a_0}, \ldots, \varphi_{a_n})$ est une base de $E^*$ et déterminer sa préduale.
3. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\,dt = \lambda_0 P(a_0) + \ldots + \lambda_n P(a_n)$ puis donner la valeur des $\lambda_i$ sous la forme d'une intégrale.

Correction ▼ [005629]

**Exercice 2** **

Sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose pour tout $P \in E$, $\varphi_1(P) = P(0)$ et $\varphi_2(P) = P(1)$ puis $\psi_1(P) = P'(0)$ et $\psi_2(P) = P'(1)$. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ est une base de $E^*$ et trouver la base dont elle est la duale.

Correction ▼ [005630]

**Exercice 3** **

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\varphi$ et $\psi$ deux formes linéaires sur $E$. On suppose que pour tout $x$ de $E$, on a $\varphi(x)\psi(x) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$ ou $\psi = 0$.

Correction ▼ [005631]

**Exercice 4** ***

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\varphi_1$,..., $\varphi_n$ et $\varphi$ $n+1$ formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie.

   Montrer que : $\left(\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n /\ \varphi = \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_n\varphi_n \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi\right)$.
2. Signification du résultat précédent : dans $\mathbb{R}^3$, équation d'un plan $P$ contenant $D$ : $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x+3z=0 \end{array}\right.$ et le vecteur $u = (1,1,1)$ ?

Correction ▼ [005632]

**Exercice 5** ***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\varphi_1$,..., $\varphi_n$ $n$ formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace $E$ de dimension $n$.
Montrer que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est liée si et seulement si il existe un vecteur $x$ non nul tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_i(x) = 0$.

Correction ▼ [005633]

**Exercice 6** **

Rang du système de formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{l} f_1 = x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \\ f_2 = x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 \\ f_3 = x_1 + x_3 + (m+4)x_4 \\ f_4 = x_2 - 3x_3 - mx_4 \end{array} \quad ?$$

Correction ▼ [005634]

## Correction de l’exercice 1 ▲

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P,Q) \in E^2$.

$$\varphi_a(\lambda P+\mu Q) = (\lambda P+\mu Q)(a) = \lambda P(a)+\mu Q(a) = \lambda\varphi_a(P)+\mu\varphi_a(Q).$$

Donc, $\varphi_a$ est une forme linéaire sur $E$.

2. On a déjà card $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n} = n+1 = \dim(E) = \dim(E^*) < +\infty$. Il suffit donc de vérifier que la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est libre.

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k = \prod_{j\neq k} \frac{X-a_j}{a_k-a_j}$. Chaque $P_k$ est un élément de $E$ et de plus

$$\forall (j,k) \in [\![0,n]\!]^2,\ \varphi_{a_j}(P_k) = \delta_{j,k} = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } j\neq k \\ 0 \text{ si } j=k \end{array}\right. \quad (*).$$

Soit alors $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\varphi_j = 0 \Rightarrow \forall P\in E,\ \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\varphi_j(P) = 0 \Rightarrow \forall k\in[\![0,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\varphi_j(P_k) = 0 \Rightarrow \forall k\in[\![0,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\delta_{j,k} = 0$$
$$\Rightarrow \forall k\in[\![0,n]\!],\ \lambda_k = 0.$$

Ceci montre que la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est libre et donc une base de $E^*$. Les égalités $(*)$ montrent alors que la préduale de la base $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de $E^*$ est la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

3. Pour $P \in E$, posons $\varphi(P) = \int_0^1 P(t)\,dt$. $\varphi$ est une forme linéaire sur $E$ et donc, puisque la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $E^*$, il existe $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\varphi = \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\varphi_{a_j}$ ou encore il existe $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que pour tout $P\in E$, $\int_0^1 P(t)\,dt = \lambda_0 P(a_0)+\ldots+\lambda_n P(a_n)$ (les $\lambda_j$ étant indépendants de $P$).

En appliquant cette dernière égalité au polynôme $P_k$, $0\leqslant k\leqslant n$, on obtient $\lambda_k = \int_0^1 P_k(t)\,dt = \int_0^1 \prod_{j\neq k}\frac{t-a_j}{a_k-a_j}\,dt$.

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{C}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n}\lambda_k P(a_k) \text{ où } \forall k\in[\![0,n]\!],\ \lambda_k = \int_0^1 \prod_{j\neq k}\frac{t-a_j}{a_k-a_j}\,dt.}$$

## Correction de l’exercice 2 ▲

Les quatre applications $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ et $\psi_2$ sont effectivement des formes linéaires sur $E$.

Cherchons tout d’abord la future base préduale de la famille $(\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)$. On note $(P_0,P_1,P_2,P_3)$ cette future base.

• On doit avoir $\varphi_1(P_2) = \varphi_2(P_2) = \psi_2(P_2) = 0$ et $\psi_1(P_2) = 1$. Ainsi, $P_2$ s’annule en 0 et en 1 et de plus $P_2'(1) = 0$. Donc $P_2$ admet 0 pour racine d’ordre 1 au moins et 1 pour racine d’ordre 2 au moins. Puisque $P_2$ est de degré inférieur ou égal à 3, il existe une constante $a$ telle que $P_2 = aX(X-1)^2 = aX^3-2aX^2+aX$ puis $P_2'(0) = 1$ fournit $a = 1$ puis $P_2 = X(X-1)^2$.

• De même, il existe une constante $a$ telle que $P_3 = aX^2(X-1) = aX^3-aX^2$ et $1 = P_3'(1) = 3a-2a$ fournit $P_3 = X^2(X-1)$.

• $P_0$ admet 1 pour racine double et donc il existe deux constantes $a$ et $b$ telles que $P_0 = (aX+b)(X-1)^2$ puis les égalités $P_0(0) = 1$ et $P_0'(0) = 0$ fournissent $b = 1$ et $a-2b = 0$. Par suite, $P_0 = (2X+1)(X-1)^2$.

• $P_1$ admet 0 pour racine double et il existe deux constantes $a$ et $b$ telles que $P_1 = (aX+b)X^2$ puis les égalités $P_1(1) = 1$ et $P_1'(1) = 0$ fournissent $a+b = 1$ et $3a+2b = 0$ et donc $P_1 = (-2X+3)X^2$.

$$\boxed{P_0=(2X+1)(X-1)^2,\ P_1=(-2X+3)X^2,\ P_2=X(X-1)^2 \text{ et } P_3=X^2(X-1).}$$

Montrons alors que $(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est une base de $E^*$. Cette famille est libre car si $a\varphi_1+b\varphi_2+c\psi_1+d\psi_2=0$, on obtient en appliquant successivement à $P_0$, $P_1$, $P_2$ et $P_3$, $a=b=c=d=0$. Mais alors, la famille $(\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)$ est une famille libre de $E^*$ de cardinal 4et donc une base de $E^*$. Sa préduale est $(P_0,P_1,P_2,P_3)$.

---

## Correction de l'exercice 3 ▲

**1 ère solution.** On utilise le fait qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux contient l'autre. Donc

$$\varphi\psi=0\Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi\cup\mathrm{Ker}\psi=E\Rightarrow \mathrm{Ker}\psi\subset\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\varphi\cup\mathrm{Ker}\psi=E \text{ ou } \mathrm{Ker}\varphi\subset\mathrm{Ker}\psi=\mathrm{Ker}\varphi\cup\mathrm{Ker}\psi=E\Rightarrow \varphi=0 \text{ ou } \psi=0.$$

**2ème solution.** Supposons que $\varphi\psi=0$ et qu'il existe $x$ et $y$ tels que $\varphi(x)\neq 0$ (et donc $\psi(x)=0$) et $\psi(y)\neq 0$ (et donc $\varphi(y)=0$). Alors $0=\varphi(x+y)\psi(x+y)=(\varphi(x)+\varphi(y))(\psi(x)+\psi(y))=\varphi(x)\psi(y)$ ce qui est une contradiction.

$$\boxed{\forall(\varphi,\psi)\in(E^*)^2,\ (\forall x\in E,\ \varphi(x)\psi(x)=0)\Rightarrow\varphi=0 \text{ ou } \psi=0.}$$

---

## Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit $\varphi\in E^*$.

   • $\Rightarrow$ / Supposons qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $\varphi=\lambda_1\varphi_1+...+\lambda_n\varphi_n$.

   Soit $x\in\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i$. Alors $\varphi(x)=\lambda_1\varphi_1(x)+\ldots+\lambda_n\varphi_n(x)=0+\ldots+0=0$ et donc $x\in\mathrm{Ker}\varphi$. On a montré que $\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i\subset\mathrm{Ker}\varphi$.

   • $\Leftarrow$ / Supposons tout d'abord la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ libre. On complète éventuellement la famille libre $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ de $E^*$ en une base $(\varphi_1,\dots,\varphi_n,\varphi_{n+1},\dots,\varphi_p)$ de $E^*$ et on note $(e_1,\dots,e_n,e_{n+1},\dots,e_p)$ la préduale de la base $(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$.

   Soit $x=\sum_{i=1}^{p}x_ie_i$ un élément de $E$.

$$x\in\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i\Leftrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],\ \varphi_i(x)=0\Leftrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i=0\Leftrightarrow x\in\mathrm{Vect}(e_{n+1},\dots,e_p)$$

   (avec la convention usuelle $\mathrm{Vect}(\varnothing)=\{0\}$ dans le cas $p=n$). Donc $\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i=\mathrm{Vect}(e_{n+1},\dots,e_p)$.

   Soit alors $\varphi\in E^*$. Posons $\varphi=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\varphi_i$.

$$\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i\subset\mathrm{Ker}\varphi\Rightarrow\mathrm{Vect}(e_{n+1},\dots,e_p)\subset\mathrm{Ker}\varphi\Rightarrow\forall j\in[\![n+1,p]\!],\ \varphi(e_j)=0$$
$$\Rightarrow\forall j\in[\![n+1,p]\!],\ \lambda_j=0\Rightarrow\varphi=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i.$$

   Le résultat est donc démontré dans le cas où la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est libre.

Si tous les $\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont nuls alors $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i = E$ puis $\mathrm{Ker}\varphi = E$ et donc $\varphi = 0$. Dans ce cas aussi, $\varphi$ est combinaison linéaire des $\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Si les $\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne sont pas tous nuls et si la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est liée, on extrait de la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ génératrice de $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base $(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_m})$ de $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

On a $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\varphi_{i_k}$ mais d'autre part, tout $\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, étant combinaison linéaire des $\varphi_{i_k}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, chaque $\mathrm{Ker}\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, contient $\bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\varphi_{i_k}$ et donc $\bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\varphi_{i_k} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i$. Finalement, $\bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\varphi_{i_k} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi$. D'après l'étude du cas où la famille est libre, $\varphi$ est combinaison linéaire des $\varphi_{i_k}$, $1 \leqslant k \leqslant m$ et donc des $\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. La réciproque est démontrée dans tous les cas.

2. Soit $\varphi$ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ telle que $P = \mathrm{Ker}\varphi$ (en particulier $\varphi$ n'est pas nulle). Soient $\varphi_1$ la forme linéaire $(x,y,z) \mapsto x+y+z$ et $\varphi_2$ la forme linéaire $(x,y,z) \mapsto 2x+3z$. Alors la famille $(\varphi_1, \varphi_2)$ est une famille libre du dual de $\mathbb{R}^3$ et $D = \mathrm{Ker}\varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\varphi_2$. D'après 1)

$$D \subset P \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} / \ \varphi = a\varphi_1 + b\varphi_2 \text{ (théorie des faisceaux)},$$

puis

$$u \in P \Leftrightarrow a\varphi_1(u) + b\varphi_2(u) = 0 \Leftrightarrow 3a + 5b = 0.$$

Une équation de $P$ est donc $5(x+y+z) - 3(2x+3z) = 0$ ou encore $-x+5y-4z = 0$.

---

## Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $f : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \end{array}$. Il s'agit de démontrer que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est liée si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$.

• Si la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est libre, c'est une base de $E^*$ (car $\dim(E^*) = n$). Notons $(u_1, \ldots, u_n)$ sa préduale et notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $f(u_i) = e_i$. Ainsi, l'image par $f$ d'une base de $E$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et on sait alors que $f$ est un isomorphisme. En particulier, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

• Si les $\varphi_i$ sont tous nuls, tout vecteur non nul $x$ annule chaque $\varphi_i$. Supposons alors que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est liée et que les $\varphi_i$ ne sont pas tous nuls. On extrait de la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base $(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_m})$ (avec $1 \leqslant m < n$) de $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. On complète la famille libre $(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_m})$ en une base $(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_m}, \psi_1, \ldots, \psi_{n-m})$ de $E^*$. On note $(e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$ sa préduale. Les formes linéaires $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_m}$ s'annulent toutes en $e_n$ et donc chaque $\varphi_i$ s'annule en $e_n$ puisque chaque $\varphi_i$ est combinaison linéaire des $\varphi_{i_k}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Le vecteur $e_n$ est donc un vecteur non nul $x$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_i(x) = 0$.

---

## Correction de l'exercice 6 ▲

La matrice de la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4)$ dans la base canonique du dual de $\mathbb{R}^4$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & m & 1 & -3 \\ -2 & 1 & m+4 & -m \end{pmatrix}$.

La matrice $A$ a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & m+1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & m+6 & -m \end{pmatrix}$ (pour $2 \leqslant j \leqslant 3$, $C_j \leftarrow C_j - C_1$) puis que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2m & m-2 \\ -2 & 3 & m & -m+3 \end{pmatrix}$ ($C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2$ et $C_4 \leftarrow C_4 + C_2$)

• Si $m=0$, $A$ a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et donc $\text{rg}(A)=3$.

• Si $m\neq 0$, $A$ a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2 & m-2 \\ -2 & 3 & 1 & -m+3 \end{pmatrix}$ $(C_3 \leftarrow \frac{1}{m}C_3)$ puis que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -m+4 \end{pmatrix}$ $(C_4 \leftarrow 2C_4+(m-2)C_3)$

Donc, si $m=4$, $\text{rg}(A)=3$ et si $m$ n'est ni 0 ni 4, $\text{rg}(A)=4$.

$$\boxed{\text{Si } m\notin\{0,4\},\ \text{rg}(f_1,f_2,f_3,f_4)=4 \text{ et si } m\in\{0,4\},\ \text{rg}(f_1,f_2,f_3,f_4)=3.}$$

---