

Calculs de limites, développements limités, développements asymptotiques

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 IT

Étudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{1/(2x-\pi)}$
2. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} |\tan x|^{\cos x}$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) \right)^n$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\ln|x|}$
5. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x \cdot e^{1/(1-\sin x)}$
6. $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{th} x} \right)^{1/\sin x}$
8. $\lim_{x \rightarrow e, x < e} (\ln x)^{\ln(e-x)}$
9. $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{x^x - 1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(\operatorname{ch} x - 1)}{x^2 + 1}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x-x^2) + x - \ln x}$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x$
13. $\lim_{x \rightarrow 1/\sqrt{2}} \frac{(\arcsin x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1}$
14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos(a + \frac{1}{x})}{\cos a} \right)^x$ (où $\cos a \neq 0$)

[Correction ▼](#)

[005426]

Exercice 2 IT

Déterminer les développements limités à l'ordre demandé au voisinage des points indiqués :

1. $\frac{1}{1-x^2-x^3}$ (ordre 7 en 0)
2. $\frac{1}{\cos x}$ (ordre 7 en 0)
3. $\arccos \sqrt{\frac{x}{\tan x}}$ (ordre 3 en 0)
4. $\tan x$ (ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$)
5. $(\operatorname{ch} x)^{1/x^2}$ (ordre 2 en 0)

6. $\tan^3 x(\cos(x^2) - 1)$ (ordre 8 en 0)

7. $\frac{\ln(1+x)}{x^2}$ (ordre 3 en 1)

8. $\arctan(\cos x)$ (ordre 5 en 0)

9. $\arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ (ordre 2 en 0)

10. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\arcsin^2 x}$ (ordre 5 en 0)

11. $\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$ (ordre 10 en 0)

12. $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$ (ordre 100 en 0)

13. $\tan \sqrt[3]{4(\pi^3 + x^3)}$ (ordre 3 en π)

[Correction ▼](#)

[005427]

Exercice 3 ***

Soit $0 < a < b$. Etude complète de la fonction $f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$.

[Correction ▼](#)

[005428]

Exercice 4 **

Etude au voisinage de $+\infty$ de $\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt[3]{8x^3 + 7x^2 + 1}$.

[Correction ▼](#)

[005429]

Exercice 5 **

Soit $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ en moins de 10 secondes puis $f^{(n)}(x)$ pour $|x| \neq 1$ en à peine plus de temps.

[Correction ▼](#)

[005430]

Exercice 6 IT

1. Equivalent simple en $+\infty$ et $-\infty$ de $\sqrt{x^2 + 3x + 5} - x + 1$.

2. Equivalent simple en 0, 1, 2 et $+\infty$ de $3x^2 - 6x$

3. Equivalent simple en 0 de $(\sin x)^{x-x^2} - (x-x^2)^{\sin x}$.

4. Equivalent simple en $+\infty$ de $x^{\text{th}x}$.

5. Equivalent simple en 0 de $\tan(\sin x) - \sin(\tan x)$.

[Correction ▼](#)

[005431]

Exercice 7 **IT

Développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^3}$ de $u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$.

[Correction ▼](#)

[005432]

Exercice 8 **IT

1. Développement asymptotique à la précision x^2 en 0 de $\frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2}$.

2. Développement asymptotique à la précision $\frac{1}{x^3}$ en $+\infty$ de $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$.

Exercice 9 **

Soient $a > 0$ et $b > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. Equivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b)$.
2. Même question pour $e^{-a}f_n(a) - 1 + \frac{a^2}{2n}$.

Exercice 10 *I**

Soit $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer brièvement que la suite u est strictement positive et converge vers 0.
2. (a) Déterminer un réel α tel que la suite $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle.
(b) En utilisant le lemme de CESARO, déterminer un équivalent simple de u_n .

Exercice 11 **I

Soit u la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Equivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 12 *I**

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ a une unique solution dans l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ pour n entier naturel donné. On note x_n cette solution.
2. Trouver un développement asymptotique de x_n à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 13

1. Montrer que l'équation $x + \ln x = k$ admet, pour k réel donné, une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée x_k .
2. Montrer que, quand k tend vers $+\infty$, on a : $x_k = ak + b \ln k + c \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$ où a, b et c sont des constantes à déterminer.

Exercice 14 **

Soit $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$.

1. Montrer que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} .
3. Montrer que f' n'admet en 0 aucun développement limité d'aucun ordre que ce soit.

Exercice 15 **IT

Etude au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x}$ (existence d'une tangente ?)

Exercice 16 **I

1. La fonction $x \mapsto \arccos x$ admet-elle en 1 (à gauche) un développement limité d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?
2. Equivalent simple de $\arccos x$ en 1.

Exercice 17 ***

1. Développement limité à l'ordre n en 0 de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$.
2. Soit a_k le k -ème coefficient. Montrer que a_k est le nombre de solutions dans \mathbb{N}^2 de l'équation $p + 2q = k$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Si $x \in]0, \pi[$, $\sin x > 0$, de sorte que la fonction proposée est bien définie sur un voisinage pointé de $\frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ auquel on a enlevé le point $\frac{\pi}{2}$) et de plus $(\sin x)^{1/(2x-\pi)} = e^{\ln(\sin x)/(2x-\pi)}$. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ tend vers 1 et donc

$$\ln(\sin x) \sim \sin x - 1 = -\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \sim -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 = -\frac{(2x - \pi)^2}{8}.$$

Donc, $\frac{\ln(\sin x)}{2x-\pi} \sim -\frac{2x-\pi}{8} \rightarrow 0$ et enfin $(\sin x)^{1/(2x-\pi)} = e^{\ln(\sin x)/(2x-\pi)} \rightarrow e^0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{1/(2x-\pi)} = 1.$$

2. Si $x \in]0, \pi[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$, $|\tan x| > 0$, de sorte que la fonction proposée est bien définie sur un voisinage pointé de $\frac{\pi}{2}$ et de plus $|\tan x|^{\cos x} = e^{\cos x \ln|\tan x|}$. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$,

$$\ln|\tan x| = \ln|\sin x| - \ln|\cos x| \sim -\ln|\cos x|,$$

puis $\cos x \ln|\tan x| \sim -\cos x \ln|\cos x| \rightarrow 0$ (car, quand u tend vers 0, $u \ln u \rightarrow 0$). Donc, $|\tan x|^{\cos x} = e^{\cos x \ln|\tan x|} \rightarrow e^0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\tan x|^{\cos x} = 1.$$

3. Quand n tend vers $+\infty$, $\cos \frac{n\pi}{3n+1} + \sin \frac{n\pi}{6n+1} \rightarrow \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} = 1$ (et on est en présence d'une indétermination du type $1^{+\infty}$). Quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} \cos \frac{n\pi}{3n+1} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{-1} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(\frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{18n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \sin \frac{n\pi}{6n+1} &= \sin \left(\frac{\pi}{6} \left(1 + \frac{1}{6n}\right)^{-1} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(\frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{72n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Puis,

$$n \ln \left(\cos \frac{n\pi}{3n+1} + \sin \frac{n\pi}{6n+1} \right) = n \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = n \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{24} + o(1),$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{n\pi}{3n+1} + \sin \frac{n\pi}{6n+1} \right)^n = e^{\sqrt{3}\pi/24}.$$

4. Quand x tend vers 0, $\ln(\cos x) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$. Puis, $\ln|x| \ln(\cos x) \sim -\frac{x^2}{2} \ln|x| \rightarrow 0$. Donc, $(\cos x)^{\ln|x|} \rightarrow e^0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\ln|x|} = 1.$$

5. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{1-\sin x}$ tend vers $+\infty$. Posons $h = x - \frac{\pi}{2}$ puis $\varepsilon = \operatorname{sgn}(h)$, de sorte que

$$(\cos x)e^{1/(1-\sin x)} = -\varepsilon |\sin h| e^{1/(1-\cos h)} = -\varepsilon e^{\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h}}.$$

Or, quand h tend vers 0,

$$\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h} = \frac{(1-\cos h)\ln|\sin h| + 1}{1-\cos h} = \frac{(-\frac{h^2}{2} + o(h^2))(\ln|h| + o(\ln|h|)) + 1}{\frac{h^2}{2} + o(h^2)} = \frac{1 + o(1)}{\frac{h^2}{2} + o(h^2)} \sim \frac{2}{h^2},$$

et donc, quand h tend vers 0, $\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h} \sim \frac{2}{h^2} \rightarrow +\infty$. Par suite,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2, x < \pi/2} \cos(x)e^{1/(1-\sin x)} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pi/2, x > \pi/2} \cos(x)e^{1/(1-\sin x)} = -\infty.$$

6. Pour $x \in \mathbb{R}$, $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = (2\cos x - 1)(\cos x - 1)$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \right) \cup 2\pi\mathbb{Z}.$$

Pour $x \notin \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \frac{(2\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(2\cos x - 1)(\cos x - 1)} = \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1},$$

et donc, $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = -3.$$

7. Quand x tend vers 0,

$$\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{th} x} = \frac{1 + x + o(x)}{1 + x + o(x)} = (1 + x + o(x))(1 - x + o(x)) = 1 + o(x).$$

Puis, quand x tend vers 0,

$$\frac{1}{\sin x} \ln \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{th} x} \right) = \frac{\ln(1 + o(x))}{x + o(x)} = \frac{o(x)}{x + o(x)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)} \rightarrow 0.$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{th} x} \right)^{1/\sin x} = 1.$$

8. Quand x tend vers e par valeurs inférieures, $\ln(x)$ tend vers 1 et donc

$$\ln(\ln x) \sim \ln x - 1 = \ln\left(\frac{x}{e}\right) \sim \frac{x}{e} - 1 = -\frac{1}{e}(e-x),$$

puis,

$$\ln(e-x)\ln(\ln x) \sim -\frac{1}{e}(e-x)\ln(e-x) \rightarrow 0,$$

et donc $(\ln x)^{\ln(e-x)} = e^{\ln(e-x)\ln(\ln x)} \rightarrow 1$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} (\ln x)^{\ln(e-x)} = 1.$$

9. Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $x \ln x \rightarrow 0$, et donc

$$x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1 \sim x \ln x \sim 1 \times (x-1) = x-1.$$

Ensuite, $\sqrt{x^2-1}$ tend vers 0 et donc

$$\ln(1 - \sqrt{x^2-1}) \sim -\sqrt{x^2-1} = -\sqrt{(x-1)(x+1)} \sim -\sqrt{2(x-1)}.$$

Finalement, quand x tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2-1})} \sim \frac{x-1}{-\sqrt{2(x-1)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x-1} \rightarrow 0.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > e}} \frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2-1})} = 0.$$

10. Quand x tend vers $+\infty$,

$$\ln(\operatorname{ch} x - 1) \sim \ln(\operatorname{ch} x) \sim \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) = x - \ln 2 \sim x,$$

et donc

$$\frac{x \ln(\operatorname{ch} x - 1)}{x^2 + 1} \sim \frac{x \times x}{x^2} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(\operatorname{ch} x - 1)}{x^2 + 1} = 1.$$

11. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\ln(x - x^2) + x - \ln x = x + \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Ensuite,

$$(\sin x)^x = e^{x \ln(\sin x)} = e^{x \ln(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))} = e^{x \ln x} e^{x \ln(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2))} = x^x e^{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = x^x \left(1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right),$$

et,

$$x^{\sin x} = e^{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) \ln x} = e^{x \ln x} e^{-\frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x)} = x^x \left(1 - \frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x) \right).$$

Donc,

$$(\sin x)^x - x^{\sin x} = x^x \left(1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - x^x \left(1 - \frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x) \right) = x^x \left(\frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x) \right) \sim \frac{x^3 \ln x}{6},$$

et enfin

$$\frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x-x^2) + x - \ln x} \sim \frac{x^3 \ln x / 6}{-x^2 / 2} = -\frac{x \ln x}{3} \rightarrow 0.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x-x^2) + x - \ln x} = 0.$$

12. Quand x tend vers $+\infty$,

$$\ln(x+1) = \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln x + \frac{1}{x} + o \left(\frac{1}{x} \right),$$

puis

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x \ln x} + o \left(\frac{1}{x \ln x} \right).$$

Ensuite,

$$x \ln \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x \ln x} + o \left(\frac{1}{x \ln x} \right) \right) = \frac{1}{\ln x} + o \left(\frac{1}{\ln x} \right) \rightarrow 0.$$

$$\text{Donc, } \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x = \exp \left(x \ln \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right) \right) \rightarrow e^0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x = 1.$$

13. Quand x tend vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\begin{aligned} \frac{(\arcsin x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1} &= \frac{1}{2} \times \frac{\arcsin x + \frac{\pi}{4}}{x + \frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \sim \frac{1}{2} \times \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &\rightarrow \frac{\pi}{4\sqrt{2}} (\arcsin)' \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/\sqrt{2}} \frac{(\arcsin x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1} = \frac{\pi}{4}.$$

14. Quand x tend vers $+\infty$,

$$x \ln \left(\frac{\cos \left(a + \frac{1}{x} \right)}{\cos a} \right) = x \ln \left(\cos \frac{1}{x} - \tan a \sin \frac{1}{x} \right) = x \ln \left(1 - \frac{\tan a}{x} + o \left(\frac{1}{x} \right) \right) = x \left(-\frac{\tan a}{x} + o \left(\frac{1}{x} \right) \right) \\ = -\tan a + o(1),$$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos \left(a + \frac{1}{x} \right)}{\cos a} \right)^x = e^{-\tan a}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos \left(a + \frac{1}{x} \right)}{\cos a} \right)^x = e^{-\tan a}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1.

$$\frac{1}{1-x^2-x^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + (x^2+x^3) + (x^2+x^3)^2 + (x^2+x^3)^3 + o(x^7) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + o(x^7).$$

$$\frac{1}{1-x^2-x^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + o(x^7).$$

$$\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7) \right)^{-1} = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} \right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} \right)^3 + o(x^7) \\ = 1 + \frac{x^2}{2} + x^4 \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4} \right) + x^6 \left(\frac{1}{720} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8} \right) + o(x^7) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^7).$$

$$\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^7).$$

3. Remarques.

- (a) Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\setminus \{0\}$, on a $0 < \frac{x}{\tan x} < 1$ et donc la fonction $x \mapsto \arccos \left(\frac{x}{\tan x} \right)$ est définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\setminus \{0\}$ (qui est un voisinage pointé de 0).
- (b) Quand x tend vers 0, $\frac{x}{\tan x} \rightarrow 1$ et donc $\arccos \left(\frac{x}{\tan x} \right) = o(1)$ (développement limité à l'ordre 0).
- (c) La fonction $x \mapsto \arccos x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (donc a priori, c'est mal parti).
- (d) La fonction proposée est paire et, si elle admet en 0 un développement limité d'ordre 3, sa partie régulière ne contient que des exposants pairs.

- Recherche d'un équivalent simple de $\arccos x$ en 1 à gauche. Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $\arccos x \rightarrow 0$ et donc,

$$\arccos x \sim \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

- Déterminons un équivalent simple de $\arccos \left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}} \right)$ en 0. D'après ce qui précède,

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) \sim \sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \sim \sqrt{\frac{x^3/3}{x}} = \frac{|x|}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)$ n'est pas dérivable en 0 (mais est dérivable à droite et à gauche) et n'admet donc pas de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (mais admet éventuellement des développements limités à gauche et à droite pour lesquels la remarque initiale sur la parité des exposants ne tient plus). • Déterminons un équivalent simple de $f(x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}}$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

$$\begin{aligned} \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}} &\sim \sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \cos\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) \\ &= \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{\frac{x}{\tan x}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = g(x) \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} &= \left(\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right) \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^{-1}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right) \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{45} + o(x^5)\right)^{1/2} = \frac{x}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{x^2}{15} + o(x^2)\right)^{1/2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{30\sqrt{3}} + o(x^3), \end{aligned}$$

et donc,

$$\sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{30\sqrt{3}} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{15\sqrt{3}} + o(x^3).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{\tan x}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) &= \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^{-1/2} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{18\sqrt{3}} + o(x^3)\right) = \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{18\sqrt{3}} + o(x^3)\right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{9\sqrt{3}} + o(x^3), \end{aligned}$$

et finalement,

$$g(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{15\sqrt{3}} + o(x^3)\right) - \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{9\sqrt{3}} + o(x^3)\right) = \frac{4x^3}{45\sqrt{3}} + o(x^3) \sim \frac{4x^3}{45\sqrt{3}}.$$

Ainsi, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{4x^3}{45\sqrt{3}} + o(x^3).$$

f étant paire, on en déduit que

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{|x|}{\sqrt{3}} + \frac{4|x|^3}{45\sqrt{3}} + o(x^3).$$

(Ce n'est pas un développement limité).

4. La fonction $x \mapsto \tan x$ est trois fois dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et admet donc en $\frac{\pi}{4}$ un développement limité d'ordre 3 à savoir son développement de TAYLOR-YOUNG. $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ puis $(\tan)'(\frac{\pi}{4}) = 1 + \tan^2 \frac{\pi}{4} = 2$. Ensuite, $(\tan)''(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$ et $(\tan)''(\frac{\pi}{4}) = 4$. Enfin,

$$(\tan)^{(3)}(x) = 2(1 + \tan^2 x)^2 + 4 \tan^2 x (1 + \tan^2 x),$$

et $(\tan)^{(3)}(\frac{\pi}{4}) = 16$. Finalement,

$$\tan x \underset{x \rightarrow \pi/4}{=} 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3 + o\left((x - \frac{\pi}{4})^3\right).$$

$$\frac{1}{x^2} \ln(\operatorname{ch} x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)\right) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2),$$

et donc

$$(\operatorname{ch} x)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)} = e^{1/2} e^{-\frac{x^2}{12} + o(x^2)} = \sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{12} x^2 + o(x^2).$$

$$5. \quad (\operatorname{ch} x)^{1/x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{12} x^2 + o(x^2).$$

6. $\tan^3 x (\cos(x^2) - 1) = \tan x \times \tan^2 x (\cos(x^2) - 1)$ et un équivalent de $\tan^2 x (\cos(x^2) - 1)$ en 0 est $-\frac{x^6}{2}$. On écrit donc $\tan x$ à l'ordre 2. De même, un équivalent de $\tan^3 x$ est x^3 et on écrit donc $\cos(x^2) - 1$ à l'ordre 5.

$$\tan^3 x (\cos(x^2) - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} (x + o(x^2))^3 \left(-\frac{x^4}{2} + o(x^5)\right) = (x^3 + o(x^4)) \left(-\frac{x^4}{2} + o(x^5)\right) = -\frac{x^7}{2} + o(x^8).$$

$$\tan^3 x (\cos(x^2) - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^7}{2} + o(x^8).$$

7. On pose $h = x - 1$ ou encore $x = 1 + h$, de sorte que x tend vers 1 si et seulement si h tend vers 0.

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{x^2} &= \ln(2+h)(1+h)^{-2} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right)\right) \left(1 - 2h + \frac{(-2)(-3)}{2} h^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{6} h^3 + o(h^3)\right) \\ &= \left(\ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3)\right) (1 - 2h + 3h^2 - 4h^3 + o(h^3)) \\ &= \ln 2 + \left(\frac{1}{2} - 2\ln 2\right) h + \left(3\ln 2 - \frac{9}{8}\right) h^2 + \left(-4\ln 2 + \frac{43}{24}\right) h^3 + o(h^3). \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 1}{=} \ln 2 + \left(\frac{1}{2} - 2\ln 2\right)(x-1) + \left(3\ln 2 - \frac{9}{8}\right)(x-1)^2 + \left(-4\ln 2 + \frac{43}{24}\right)(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

8. Pour x réel, posons $f(x) = \arctan(\cos x)$. f est dérivable sur \mathbb{R} , et pour x réel, $f'(x) = -\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. Puis,

$$\begin{aligned} f'(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 + \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2\right)^{-1} \\ &= -\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) (2 - x^2 + o(x^3))^{-1} = -\frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4). \end{aligned}$$

Donc, f' admet un développement limité d'ordre 4 en 0 et on sait que f admet en 0 un développement limité d'ordre 5 obtenu par intégration.

$$\arctan(\cos x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \arctan(\cos 0) - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) = \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

$$\arctan(\cos x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

9. Pour $x > -1$, posons $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$. f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et pour $x > -1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x+2)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} \frac{1}{1 + \frac{x+1}{x+2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2x+3)\sqrt{(1+x)(2+x)}} \\ &= \frac{1}{2 \times 3 \times \sqrt{2}} \left(1 + \frac{2x}{3}\right)^{-1} (1+x)^{-1/2} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2x}{3} + o(x)\right) \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) \left(1 - \frac{x}{4} + o(x)\right) \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)x + o(x)\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(1 - \frac{17x}{12} + o(x)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, f' admet donc en 0 un développement limité d'ordre 1 et on sait alors que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2 obtenu par intégration.

$$\arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}}x - \frac{17}{144\sqrt{2}}x^2 + o(x^2).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-1/2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}(-x^2)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}(-x^2)^3 + o(x^7) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o(x^7). \end{aligned}$$

Donc, $\arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + o(x^8)$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\arcsin^2 x} &= (\arcsin x)^{-2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + \frac{5x^6}{112} + o(x^7) \right)^{-2} \\
&= \frac{1}{x^2} \left(1 - 2 \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + \frac{5x^6}{112} \right) + 3 \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} \right)^2 - 4 \left(\frac{x^2}{6} \right)^3 + o(x^7) \right) \\
&= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} + \left(-\frac{3}{20} + \frac{1}{12} \right) x^2 + \left(-\frac{5}{56} + \frac{3}{40} - \frac{1}{54} \right) x^4 + o(x^5) \\
&= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} - \frac{x^2}{15} - \frac{31x^4}{945} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$10. \quad \boxed{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\arcsin^2 x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + \frac{31x^4}{945} + o(x^5).}$$

11. Pour x réel, posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. f est continue sur \mathbb{R} et admet donc des primitives sur \mathbb{R} . Soit F la primitive de f sur \mathbb{R} qui s'annule en 0 puis, pour x réel, soit $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$. g est définie sur \mathbb{R} et, pour x réel $g(x) = F(x^2) - F(x)$. g est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x ,

$$g'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Puis,

$$g'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x \left(1 - \frac{1}{2}x^8 + o(x^8) \right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^9) \right) = -1 + 2x + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{8}x^8 - x^9 + o(x^9).$$

Ainsi g' admet un développement limité d'ordre 9 en 0 et on sait que g admet un développement limité d'ordre 10 en 0 obtenu par intégration. En tenant compte de $g(0) = 0$, on obtient

$$\boxed{g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x + x^2 + \frac{x^5}{10} - \frac{x^9}{24} - \frac{x^{10}}{10} + o(x^{10}).}$$

12.

$$\begin{aligned}
\ln \left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln \left(e^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}) \right) &= \ln(e^x) + \ln \left(1 - e^{-x} \left(\frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}) \right) \right) \\
&= x + \ln \left(1 - (1 + o(1)) \left(\frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100}) \right) \right) = x + \ln \left(1 - \frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100}) \right) = x - \frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\ln \left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100}).}$$

13. Posons $h = x - \pi$ ou encore $x = \pi + h$ de sorte que x tend vers π si et seulement si h tend vers 0.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{4(\pi^3 + x^3)} &= \sqrt[3]{4(\pi^3 + (\pi + h)^3)} = \sqrt[3]{8\pi^3 + 12\pi^2h + 12\pi h^2 + 4h^3} \\
&\underset{h \rightarrow 0}{=} 2\pi \left(1 + \frac{3h}{2\pi} + \frac{3h^2}{2\pi^2} + \frac{h^3}{2\pi^3} \right)^{1/3} \\
&= 2\pi \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{3h}{2\pi} + \frac{3h^2}{2\pi^2} + \frac{h^3}{2\pi^3} \right) - \frac{1}{9} \left(\frac{3h}{2\pi} + \frac{3h^2}{2\pi^2} \right)^2 + \frac{5}{81} \left(\frac{3h}{2\pi} \right)^3 + o(h^3) \right) \\
&= 2\pi + h + h^2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \right) + h^3 \left(\frac{1}{3\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{5}{12\pi^2} \right) + o(h^3) \\
&= 2\pi + h + \frac{h^2}{2\pi} - \frac{h^3}{4\pi^2} + o(h^3).
\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3 + x^3)}) &= \tan \left(h + \frac{h^2}{2\pi} - \frac{h^3}{4\pi^2} + o(h^3) \right) \\
&= \left(h + \frac{h^2}{2\pi} - \frac{h^3}{4\pi^2} \right) + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3) = h + \frac{h^2}{2\pi} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi^2} \right) h^3 + o(h^3).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3 + x^3)}) \underset{x \rightarrow \pi}{=} (x-1) + \frac{1}{2\pi}(x-1)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi^2} \right) (x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Puisque $a > 0$, $b > 0$ et que pour tout réel x , $\frac{a^x + b^x}{2} > 0$, f est définie sur \mathbb{R}^* , et pour

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right).$$

Etude en 0.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) &= \ln\left(\frac{e^{x \ln a} + e^{x \ln b}}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln\left(1 + x\left(\frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{2} \ln b\right) + x^2\left(\frac{1}{4} \ln^2 a + \frac{1}{4} \ln^2 b\right) + o(x^2)\right) \\
&= \ln\left(1 + x \ln(\sqrt{ab}) + x^2 \frac{\ln^2 a + \ln^2 b}{4} + o(x^2)\right) = x \ln(\sqrt{ab}) + x^2 \frac{\ln^2 a + \ln^2 b}{4} - \frac{1}{2}(x \ln \sqrt{ab})^2 + o(x^2) \\
&= x \ln(\sqrt{ab}) + \frac{1}{8}(\ln^2 a - 2 \ln a \ln b + \ln^2 b)x^2 + o(x^2) = x \ln(\sqrt{ab}) + x^2 \frac{1}{8} \ln^2\left(\frac{a}{b}\right) + o(x^2).
\end{aligned}$$

Enfin,

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} = \exp(\ln(\sqrt{ab}) + \frac{1}{8} \ln^2 \frac{a}{b} x + o(x)) = \sqrt{ab} \left(1 + \frac{1}{8} x \ln^2 \frac{a}{b} + o(x)\right).$$

Ainsi, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = \sqrt{ab}$. Le prolongement obtenu est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{\sqrt{ab}}{8} \ln^2 \frac{a}{b} (> 0)$. **Etude en $+\infty$.**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{2}(a^x + b^x)\right) &= \frac{1}{x} \left(\ln(b^x) - \ln 2 + \ln\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^x\right) \right) = \frac{1}{x} (x \ln b + o(x)) \quad (\text{car } 0 < \frac{a}{b} < 1) \\
&= \ln b + o(1).
\end{aligned}$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b (= \text{Max}\{a, b\})$. **Etude en $-\infty$.** Pour tout réel x ,

$$f(-x) = \left(\frac{a^{-x} + b^{-x}}{2} \right)^{-1/x} = \left(\frac{a^x + b^x}{2a^x b^x} \right)^{-1/x} = \frac{ab}{f(x)},$$

et donc,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(-X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{ab}{f(X)} = \frac{ab}{b} = a \quad (= \text{Min}\{a, b\}).$$

Dérivée et variations. f est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$ en vertu de théorèmes généraux (et aussi en 0 d'après l'étude faite plus haut), et pour $x \neq 0$ (puisque $f > 0$ sur \mathbb{R}^*),

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f)'(x) = \left(\frac{1}{x} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) \right)'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) + \frac{1}{x} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x}.$$

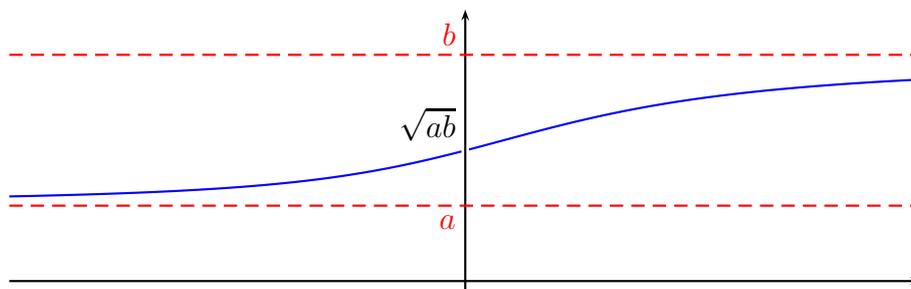
f' a le même signe que $(\ln f)'$ qui, elle-même, a le même signe que la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -\ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) + x \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x}.$$

g est dérivable sur \mathbb{R} et, pour x réel,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x} + \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x} + x \frac{(a^x \ln^2 a + b^x \ln^2 b)(a^x + b^x) - (a^x \ln a + b^x \ln b)^2}{(a^x + b^x)^2} \\ &= x \frac{(ab)^x (\ln a - \ln b)^2}{(a^x + b^x)^2}. \end{aligned}$$

g' est donc strictement négative sur $] -\infty, 0[$ et strictement positive sur $] 0, +\infty[$. Par suite, g est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ et strictement croissante sur $] 0, +\infty[$. g' admet donc un minimum global strict en 0 et puisque $g(0) = 0$, on en déduit que g est strictement positive sur \mathbb{R}^* . De même, f' est strictement positive sur \mathbb{R}^* . En tant compte de l'étude en 0, on a montré que f est dérivable sur \mathbb{R} et que f' est strictement positive sur \mathbb{R} . f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} . Le **graphe de f** a l'allure suivante :



On peut noter que les inégalités $\lim_{x \rightarrow -\infty} f < f(-1) < f(0) < f(1) < \lim_{x \rightarrow +\infty} f$ fournissent :

$$a < \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Quand x tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{x^2 - 3} = x \left(1 - \frac{3}{x^2} \right)^{1/2} = x \left(1 - \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et,

$$\sqrt[3]{8x^3 + 7x^2 + 1} = 2x \left(1 + \frac{7}{8x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^{1/3} = 2x \left(1 + \frac{7}{24x} - \frac{49}{576x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = 2x + \frac{7}{12} - \frac{49}{288x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} -x - \frac{7}{12} - \frac{383}{288x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe représentative de f admet donc en $+\infty$ une droite asymptote d'équation $y = -x - \frac{7}{12}$. De plus, le signe de $f(x) - \left(-x - \frac{7}{12}\right)$ est, au voisinage de $+\infty$, le signe de $-\frac{383}{288x}$. Donc la courbe représentative de f est au-dessous de la droite d'équation $y = -x - \frac{7}{12}$ au voisinage de $+\infty$.

Correction de l'exercice 5 ▲

f est de classe C^∞ sur son domaine $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ en tant que fraction rationnelle et en particulier admet un développement limité à tout ordre en 0. Pour tout entier naturel n , on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^3 + \dots + x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité et d'après la formule de TAYLOR-YOUNG, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(2n)}(0) = 0 \text{ et } f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!.$$

Ensuite, pour $x \notin \{-1, 1\}$, et n entier naturel donné,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)^{(n)}(x) = \frac{n!}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} \right).$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1.

$$\sqrt{x^2 + 3x + 5} - x + 1 \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -x - x = -2x,$$

et,

$$\sqrt{x^2 + 3x + 5} - x + 1 = \frac{(x^2 + 3x + 5) - (x-1)^2}{\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3x + 2x}{x + x} = \frac{5}{2}.$$

2. $3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -6x$ et $3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 3x^2$. Ensuite, quand x tend vers 1, $3x^2 - 6x$ tend vers $-3 \neq 0$ et donc, $3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -3$. Enfin, $3x^2 - 6x = 3x(x-2) \underset{x \rightarrow 2}{\sim} 6(x-2)$.

$$3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -6x \quad 3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 3x^2 \quad 3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -3 \quad 3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow 2}{\sim} 6(x-2).$$

3.

$$(x-x^2) \ln(\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (x-x^2) \ln x + (x-x^2) \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) = x \ln x - x^2 \ln x + o(x^2 \ln x).$$

Ensuite,

$$\sin x \ln(x-x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) (\ln x + \ln(1-x)) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) (\ln x - x + o(x)) = x \ln x + o(x^2 \ln x).$$

Donc,

$$\begin{aligned}(\sin x)^{x-x^2} - (x-x^2)^{\sin x} &= e^{x \ln x} (e^{-x^2 \ln x + o(x^2 \ln x)} - e^{o(x^2 \ln x)}) = e^{x \ln x} (1 - x^2 \ln x - 1 + o(x^2 \ln x)) \\ &= (1 + o(1))(-x^2 \ln x + o(x^2 \ln x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2 \ln x.\end{aligned}$$

$$\boxed{(\sin x)^{x-x^2} - (x-x^2)^{\sin x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2 \ln x.}$$

4. $\operatorname{th} x = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} (1-e^{-2x})(1-e^{-2x}+o(e^{-2x})) = 1-2e^{-2x}+o(e^{-2x})$, et donc $\operatorname{th} x \ln x = (1-2e^{-2x}+o(e^{-2x})) \ln x = \ln x + o(1)$. Par suite,

$$x^{\operatorname{th} x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\ln x} = x.$$

5. **Tentative à l'ordre 3.**

$$\tan(\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \tan\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{3}(x^3) + o(x^3) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \text{ et,}$$

$$\sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sin\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{6}(x^3) + o(x^3) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \text{ Donc, } \tan(\sin x) - \sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3). \text{ L'ordre 3 est insuffisant pour obtenir un équivalent. Tentative à l'ordre 5.}$$

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \tan\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \frac{2}{15}(x^5) + o(x^5) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + x^5 \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{6} + \frac{2}{15}\right) + o(x^5) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5),\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sin\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right) &= \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3 + \frac{1}{120}(x^5) + o(x^5) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{6} + \frac{1}{120}\right)x^5 + o(x^5) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5).\end{aligned}$$

Donc, $\tan(\sin x) - \sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^5)$. L'ordre 5 est insuffisant pour obtenir un équivalent. Le contact entre les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \sin(\tan x)$ et $x \mapsto \tan(\sin x)$ est très fort. **Tentative à l'ordre 7.**

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \tan\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7)\right) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7) \\ &= x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \left(-\frac{1}{5040} + \frac{1}{3}\left(3 \times \frac{1}{120} + 3 \times \frac{1}{36}\right) + \frac{2}{15}\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{17}{315}\right)x^7 + o(x^7) \\ &= x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \left(-\frac{1}{5040} + \frac{1}{120} + \frac{1}{36} - \frac{1}{9} + \frac{17}{315}\right)x^7 + o(x^7),\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
\sin(\tan x) &= \sin\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17}{x^7}315 + o(x^7)\right) \\
&= \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315}\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^5 - \frac{1}{5040}(x)^7 + o(x^7) \\
&= x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \left(\frac{17}{315} - \frac{1}{6}\left(3 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{120} \times \frac{5}{3} - \frac{1}{5040}\right)x^7 + o(x^7) \\
&= x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \left(\frac{17}{315} - \frac{1}{15} - \frac{1}{18} + \frac{1}{72} - \frac{1}{5040}\right)x^7 + o(x^7).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\tan(\sin x) - \sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{36} - \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} - \frac{1}{72}\right)x^7 + o(x^7) = \frac{x^7}{30} + o(x^7),$$

et donc

$$\tan(\sin x) - \sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^7}{30}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Pour $n \geq 5$, on a

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \sum_{k=0}^{n-5} \frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)}.$$

Ensuite,

$$0 \leq n^3 \sum_{k=0}^{n-5} \frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)} \leq n^3(n-4) \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

Donc, $\sum_{k=0}^{n-5} \frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et de même $\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Il reste

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right)^{-1} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(- \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} \right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} \right)^3 + \left(\frac{x}{2} \right)^4 + o(x^4) \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(-\frac{x}{2} + x^2 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) + x^3 \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + x^4 \left(-\frac{1}{120} + \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{24} \right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) + o(x^4) \right) \\ &= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{x^2}{720} + o(x^2). \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{x^2}{720} + o(x^2).}$$

$$\begin{aligned} x \ln(x+1) - (x+1) \ln x &= x \left(\ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) - (x+1) \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} -\ln x + x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + o \left(\frac{1}{x^4} \right) \right) \\ &= -\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + o \left(\frac{1}{x^3} \right). \end{aligned}$$

$$\boxed{x \ln(x+1) - (x+1) \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} -\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + o \left(\frac{1}{x^3} \right).}$$

2.

Correction de l'exercice 9 ▲

1.

$$f_n(a) = \exp \left(n \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp \left(a - \frac{a^2}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) = e^a \left(1 - \frac{a^2}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right).$$

En remplaçant a par b ou $a+b$, on obtient

$$\begin{aligned} f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{a+b} \left(1 - \frac{(a+b)^2}{2n} \right) - e^a \left(1 - \frac{a^2}{2n} \right) e^b \left(1 - \frac{b^2}{2n} \right) + o \left(\frac{1}{n} \right) \\ &= e^{a+b} \frac{-(a+b)^2 + a^2 + b^2}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) = -\frac{ab e^{a+b}}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Donc, si $ab \neq 0$, $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{ab e^{a+b}}{n}$. Si $ab = 0$, il est clair que $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) = 0$.

2. $e^{-a} f_n(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp \left(-a + \left(a - \frac{a^2}{2n} + \frac{a^3}{3n^2} \right) + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = 1 + \left(-\frac{a^2}{2n} + \frac{a^3}{3n^2} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{a^2}{2n} \right)^2 + o \left(\frac{1}{n^2} \right)$, et donc

$$e^{-a} f_n(a) - 1 + \frac{a^2}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{8} \right) \frac{1}{n^2}.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, posons $f(x) = \sin x$. On a $f(]0, \frac{\pi}{2}[) =]0, 1[\subset]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc, puisque $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Il est connu que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin x < x$ et de plus, pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x = x \Leftrightarrow x = 0$. La suite u est à valeurs dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite u est donc strictement décroissante et, étant minorée par 0, converge vers un réel ℓ de $[0, \frac{\pi}{2}]$ qui vérifie (f étant continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$) $f(\ell) = \ell$ ou encore $\ell = 0$. En résumé,

la suite u est strictement positive, strictement décroissante et converge vers 0.

2. Soit α un réel quelconque. Puisque la suite u tend vers 0, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= (\sin u_n)^\alpha - u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3) \right)^\alpha - u_n^\alpha \\ &= u_n^\alpha \left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right)^\alpha - 1 \right) = u_n^\alpha \left(-\alpha \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right) \\ &= -\alpha \frac{u_n^{\alpha+2}}{6} + o(u_n^{\alpha+2}) \end{aligned}$$

Pour $\alpha = -2$ on a donc

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + o(1).$$

D'après le lemme de CESARO, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) = \frac{1}{3} + o(1)$ ou encore $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right) = \frac{1}{3} + o(1)$ ou enfin,

$$\frac{1}{u_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{n}{3} + \frac{1}{u_0^2} + o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{n}{3} + o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{3}.$$

Par suite, puisque la suite u est strictement positive,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Il est immédiat par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$ et donc, puisque la suite u est strictement positive, $u_{n+1} < u_n$. La suite u est strictement décroissante, minorée par 0 et donc converge vers un réel ℓ vérifiant $\ell = \ell e^{-\ell}$ ou encore $\ell(1 - e^{-\ell}) = 0$ ou encore $\ell = 0$.

u est strictement positive, strictement décroissante et converge vers 0.

Soit α un réel quelconque. Puisque la suite u tend vers 0,

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha (e^{-\alpha u_n} - 1) = u_n^\alpha (-\alpha u_n + o(u_n)) = -\alpha u_n^{\alpha+1} + o(u_n^{\alpha+1}).$$

Pour $\alpha = -1$, on obtient en particulier $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + o(1)$. Puis, comme au numéro précédent, $\frac{1}{u_n} = n + \frac{1}{u_0} + o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ et donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Pour n entier naturel donné, posons $I_n =]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. • Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in I_n$, posons $f(x) = \tan x - x$. f est dérivable sur I_n et pour x dans I_n , $f'(x) = \tan^2 x$. Ainsi, f est dérivable sur I_n et f' est strictement positive sur $I_n \setminus \{n\pi\}$. Donc f est strictement croissante sur I_n .

• Soit $n \in \mathbb{N}$. f est continue et strictement croissante sur I_n et réalise donc une bijection de I_n sur $f(I_n) = \mathbb{R}$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists ! x_n \in I_n / f(x_n) = 0$ (ou encore tel que $\tan x_n = x_n$). • On a $x_0 = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n\pi) = -n\pi < 0$ et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in]n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. En particulier,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + O(1).$$

• Posons alors $y_n = x_n - n\pi$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$. De plus, $\tan(y_n) = \tan(x_n) = n\pi + y_n$ et donc, puisque $y_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\frac{\pi}{2} > y_n = \arctan(y_n + n\pi) \geq \arctan(n\pi).$$

Puisque $\arctan(n\pi)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$, on a $y_n = \frac{\pi}{2} + o(1)$ ou encore

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

• Posons maintenant $z_n = y_n - \frac{\pi}{2} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ et d'autre part $z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$. Ensuite, $\tan(z_n + \frac{\pi}{2}) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n$ et donc $-\cotan(z_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$. Puisque z_n tend vers 0, on en déduit que

$$-\frac{1}{z_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\cotan(z_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi,$$

ou encore $z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n})$. Ainsi,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n}).$$

• Posons enfin $t_n = z_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. On sait que $t_n = o(\frac{1}{n})$ et que

$$-\cotan(t_n - \frac{1}{n\pi}) = -\cotan(z_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n}).$$

Par suite,

$$-\tan\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{1}{n\pi} \left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis,

$$\frac{1}{n\pi} - t_n = \arctan\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc $t_n = \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Finalement,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Pour $x > 0$, posons $f(x) = x + \ln x$. f est continue sur $]0, +\infty[$, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $]0, +\infty[$. f réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. En particulier,

$$\forall k \in \mathbb{R}, \exists ! x_k \in]0, +\infty[/ f(x_k) = k.$$

2. $f(\frac{k}{2}) = \frac{k}{2} + \ln \frac{k}{2} < k$ pour k suffisamment grand (car $k - (\frac{k}{2} + \ln \frac{k}{2}) = \frac{k}{2} - \ln \frac{k}{2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$ d'après les théorèmes de croissances comparées). Donc, pour k suffisamment grand, $f(\frac{k}{2}) < f(x_k)$. Puisque f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $x_k > \frac{k}{2}$ pour k suffisamment grand et donc que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$. Mais alors, $k = x_k + \ln x_k \sim x_k$ et donc, quand k tend vers $+\infty$,

$$x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} k + o(k).$$

Posons $y_k = x_k - k$. On a $y_k = o(k)$ et de plus $y_k + \ln(y_k + k) = 0$ ce qui s'écrit :

$$y_k = -\ln(k + y_k) = -\ln(k + o(k)) = -\ln k + \ln(1 + o(1)) = -\ln k + o(1).$$

Donc,

$$x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} k - \ln k + o(1).$$

Posons $z_k = y_k + \ln k = x_k - k + \ln k$. Alors, $z_k = o(1)$ et $-\ln k + z_k = -\ln(k - \ln k + z_k)$. Par suite,

$$z_k = \ln k - \ln(k - \ln k + o(1)) = -\ln\left(1 - \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right) = \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

Finalement,

$$x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} k - \ln k + \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

Correction de l'exercice 14 ▲

1. $x^3 \sin \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^3)$ et en particulier $x^3 \sin \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$. Donc, en tenant compte de $f(0) = 1$,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2).$$

f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.

2. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$. Donc, f admet en 0 un développement limité d'ordre 1. On en déduit que f est continue et dérivable en 0 avec $f(0) = f'(0) = 1$. f est d'autre part dérivable sur \mathbb{R}^* en vertu de théorèmes généraux (et donc sur \mathbb{R}) et pour $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$.
3. f' est définie sur \mathbb{R} mais n'a pas de limite en 0. f' n'admet donc même pas un développement limité d'ordre 0 en 0.

Correction de l'exercice 15 ▲

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$, et donc

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

Puis,

$$\frac{1}{\arcsin x} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + o(x^4) \right)^{-1} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x^2}{6} - \frac{3x^4}{40} + \frac{x^4}{36} + o(x^4) \right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} - \frac{17x^3}{360} + o(x^3),$$

et donc,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} = \frac{x}{6} + \frac{17x^3}{360} + o(x^3).$$

La fonction f proposée se prolonge donc par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Le prolongement est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{6}$. La courbe représentative de f admet à l'origine une tangente d'équation $y = \frac{x}{6}$. Le signe de la différence $f(x) - \frac{x}{6}$ est, au voisinage de 0, le signe de $\frac{17x^3}{360}$. La courbe représentative de f admet donc à l'origine une tangente d'inflexion d'équation $y = \frac{x}{6}$.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. $\arccos x = o(1)$ (développement limité à l'ordre 0). Mais la fonction $x \mapsto \arccos x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 un développement limité d'ordre 1.

2) Puisque $\arccos x = o(1)$,

$$\arccos x \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

$$\arccos x \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2(1+x)} &= \frac{1}{4} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n x^k + 2 \sum_{k=0}^n (k+1)x^k + \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \right) + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{2k+3+(-1)^k}{4} x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

2. On a aussi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2(1+x)} &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) \left(\sum_{k=0}^n x^{2k} \right) + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{p+2q=k} 1 \right) x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{2k+3+(-1)^k}{4}.$$

(a_k est le nombre de façons de payer k euros en pièces de 1 et 2 euros).
