Fonctions réelles d'une variable réelle dérivables (exclu études de fonctions)

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 ***

Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup\{f'(x),\ x \in [a,b]\}$. Montrer que f est affine.

Correction ▼ [005407]

Exercice 2 *** Formule de TAYLOR-LAGRANGE

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et n un entier naturel. Soit f une fonction élément de $C^n([a,b],\mathbb{R}) \cap D^{n+1}(]a,b[,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Indication. Appliquer le théorème de ROLLE à la fonction $g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où A est intelligemment choisi.

Correction ▼ [005408]

Exercice 3 *** Formule des trapèzes

Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R}) \cap D^3(]a,b[,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - f^{(3)}(c).$$

Indication. Appliquer le théorème de ROLLE à g' puis g où $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$ où A est intelligemment choisi.
Que devient cette formule si on remplace f par F une primitive d'une fonction f de classe C^1 sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$? Interprétez géométriquement.

Correction ▼ [005409]

Exercice 4 **

Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue sur I et même dérivable à droite et à gauche en tout point de I.

Correction ▼ [005410]

Exercice 5 *** Inégalités de convexité

1. Soient $x_1, x_2,..., x_n$, n réels positifs ou nuls et $\alpha_1,..., \alpha_n$, n réels strictement positifs tels que $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$. Montrer que $x_1^{\alpha_1}..x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$. En déduire que $\sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leqslant \frac{x_1+...+x_n}{n}$.
2. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   (a) Montrer que, pour tous réels a et b positifs ou nuls, $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

(b) Soient a_1,..., a_n et b_1,..., b_n, $2n$ nombres complexes. Montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q} \quad \text{(Inégalité de HÖLDER)}.$$

(c) Montrer que la fonction $x \mapsto x^p$ est convexe et retrouver ainsi l'inégalité de HÖLDER.

(d) Trouver une démonstration directe et simple dans le cas $p = q = 2$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).

Correction ▼ [005411]

Exercice 6 ***I Polynômes de LEGENDRE

Pour n entier naturel non nul donné, on pose $L_n = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
2. En étudiant le polynôme $A_n = (X^2-1)^n$, montrer que L_n admet n racines réelles simples et toutes dans $]-1;1[$.

Correction ▼ [005412]

Exercice 7 **

Déterminer dans chacun des cas suivants la dérivée n-ème de la fonction proposée :

$$1)\ x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)\ 2)\ x \mapsto \cos^3 x \sin(2x)\ 3)\ x \mapsto \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\ 4)\ x \mapsto (x^3+2x-7)e^x.$$

Correction ▼ [005413]

Exercice 8 ***I

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005414]

Exercice 9 **

Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Correction ▼ [005415]

Exercice 10 **

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ pour un certain a non nul. Montrer qu'il existe un point distinct de O de la courbe représentative de f en lequel la tangente passe par l'origine.

Correction ▼ [005416]

Exercice 11 **** Toute fonction dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux points distincts de I vérifiant $f'(a) < f'(b)$ et soit enfin un réel m tel que $f'(a) < m < f'(b)$.

1. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < m < \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$.
2. Montrer qu'il existe y dans $[a,b]$ tel que $m = \frac{f(y+h)-f(y)}{h}$ puis qu'il exsite x tel que $f'(x) = m$.

Correction ▼ [005417]

Exercice 12 ****

Soit f une fonction de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) \leqslant (f(x))^2$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f''(x) \leqslant (f'(x))^2$ (Indication. Appliquer la formule de TAYLOR-LAPLACE entre x et $x+y$ puis entre x et $x-y$).

Correction ▼ [005418]

Exercice 13 *IT

Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction $f\ :\ x \mapsto \cos\sqrt{x}$.

Correction ▼ [005419]

Exercice 14 **

Soit P un polynôme réel de degré supèrieur ou égal à 2.

1. Montrer que si P n'a que des racines simples et réelles, il en est de même de P'.
2. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, il en est de même de P'.

Correction ▼ [005420]

Exercice 15 ** Généralisation du théorème des accroissements finis

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

Soit $\Delta\ :\ \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}.$

1. Montrer que Δ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et calculer sa dérivée.
2. En déduire qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que $(g(b)-g(a))f'(c) = (f(b)-f(a))g'(c)$.

Correction ▼ [005421]

Exercice 16 **

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Correction ▼ [005422]

Exercice 17 ***

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel, $f\circ f(x) = \frac{x}{2}+3$. En remarquant que $f(\frac{x}{2}+3) = \frac{f(x)}{2}+3$, montrer que f' est constante puis déterminer f.

Correction ▼ [005423]

Exercice 18 ***I

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. (Indication. Considérer $g(x) = e^x f(x)$).

Correction ▼ [005424]

Exercice 19 ***I

Etudier la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1) $u_0 \geqslant -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, 2) $u_0 > -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n)$
3) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$, 4) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$,
5) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(2u_n)$, 6) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

Correction ▼ [005425]

Correction de l'exercice 1 ▲

f' est continue sur le segment $[a,b]$ et donc est bornée sur ce segment. Soit $M=\sup\{f'(x),\ x\in[a,b]\}$, et soit g la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que f en a et b (c'est-à-dire $\forall x\in[a,b],\ g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)=$) puis $h=f-g$. On va montrer que $h=0$ sous l'hypothèse $M=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

h est dérivable sur $[a,b]$ et, pour $x\in[a,b]$, $h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x)-M\leqslant 0$. h est donc décroissante sur $[a,b]$. Par suite, $\forall x\in[a,b],\ 0=h(b)\leqslant h(x)\leqslant h(a)=0$. Ainsi, $\forall x\in[a,b],\ h(x)=0$, ou encore $f=g$. f est donc affine sur $[a,b]$.

Correction de l'exercice 2 ▲

On a déjà $g(b)=f(b)-f(b)=0$. Puisque $a\neq b$, on peut choisir A tel que $g(a)=0$ (à savoir $A=\frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}(f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k)$.

Avec les hypothèses faites sur f, g est d'autre part continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Le théorème de ROLLE permet alors d'affirmer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$.

Pour $x\in]a,b[$, on a

$$\begin{aligned}
g'(x)&=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}+A\frac{(b-x)^n}{n!}\\
&=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+A\frac{(b-x)^n}{n!}=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n+A\frac{(b-x)^n}{n!}\\
&=\frac{(b-x)^n}{n!}(A-f^{(n+1)}(x)).
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $c\in]a,b[$ tel que $\frac{(b-c)^n}{n!}(A-f^{(n+1)}(c))=0$, et donc, puisque $c\neq b$, tel que $A=f^{(n+1)}(c)$.

L'égalité $g(a)=0$ s'éxrit alors

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{(b-a)^{n+1}f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

pour un certain réel c de $]a,b[$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Pour $x\in[a,b]$, posons $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{2}(f'(x)+f'(a))-A(x-a)^3$ où A est choisi de sorte que $g(b)=g(a)=0$ (c'est-à-dire $A=\frac{1}{(b-a)^3}(f(b)-f(a)-\frac{b-a}{2}(f'(b)+f'(a)))$.

$f\in C^2([a,b],\mathbb{R})\cap D^3(]a,b[,\mathbb{R})$ et donc $g\in C^1([a,b],\mathbb{R})\cap D^2(]a,b[,\mathbb{R})$. Pour $x\in[a,b]$, on a :

$$g'(x)=f'(x)-\frac{1}{2}(f'(x)+f'(a))-\frac{x-a}{2}f''(x)-3A(x-a)^2,$$

puis

$$g''(x)=\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{2}f''(x)-\frac{x-a}{2}f^{(3)}(x)-6A(x-a)=\frac{x-a}{2}(-12A-f^{(3)}(x)).$$

g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie de plus $g(a)=g(b)$. Donc, d'après le théorème de ROLLE, il existe $d\in]a,b[$ tel que $g'(d)=0$. De même, g' est continue sur $[a,d]\subset[a,b]$, dérivable sur $]a,d[(\neq\emptyset)$ et vérifie de plus $g'(a)=g'(d)(=0)$. D'après le théorème de ROLLE, il existe $c\in]a,d[\subset]a,b[$ tel que $g''(c)=0$ ou encore tel que $A=-\frac{1}{12}f^{(3)}(c)$ (puisque $c\neq a$).

En écrivant explicitement l'égalité $g(b)=0$, on a montré que :

$$\exists c\in]a,b[/\ f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}(f'(b)+f'(a))-\frac{1}{12}f^{(3)}(c)(b-a)^3.$$

Si $f\in C^1([a,b],\mathbb{R})\cap D^2(]a,b[,\mathbb{R})$ et si F est une primitive de f sur $[a,b]$, la formule précédente s'écrit :

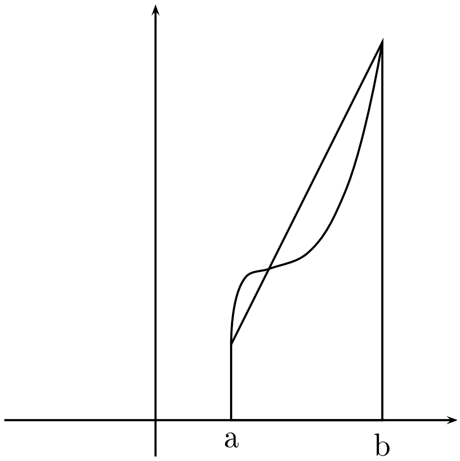
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a) = \frac{b-a}{2}(F'(b)+F'(a)) - \frac{1}{12}F^{(3)}(c)(b-a)^3 = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

Donc, si $f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \cap D^2(]a,b[,\mathbb{R})$,

$$\exists c \in]a,b[/ \int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

Interprétation géométrique.
Si f est positive, $A_1 = \int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire du domaine $D = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ et $A_2 = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a))$ est l'aire du trapèze $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$. Si $M_2 = \sup\{|f''(x)|,\ x \in [a,b]\}$ existe dans $\mathbb{R}$, on a :

$$|A_1 - A_2| \leqslant M_2 \frac{(b-a)^3}{12}.$$



Correction de l'exercice 4 ▲

Supposons que f est convexe sur un intervalle ouvert $I =]a,b[$ (a et b réels ou infinis).
Soit $x_0 \in I$. On sait que la fonction pente en x_0 est croissante.
Pour $x \neq x_0$, posons $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Soit x' un élément de $]x_0,b[$. $\forall x \in]a,x_0[$, on a $g(x) < g(x')$, ce qui montre que g est majorée au voisinage de x_0 à gauche. Etant croissante, g admet une limite réelle quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures ou encore, $\lim_{x \to x_0,\, x < x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe dans $\mathbb{R}$. f est donc dérivable à gauche en x_0. On montre de même que f est dérivable à droite en x_0.
Finalement, f est dérivable à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$. En particulier, f est continue à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$ et donc continue sur $]a,b[$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. La fonction $f\ :\ x \mapsto \ln x$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour $x > 0$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Par suite, f est concave sur $]0,+\infty[$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x_1,...,x_n) \in (]0,+\infty[)^n,\ \forall (\alpha_1,...,\alpha_n) \in (]0,1[)^n,\ (\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 \Rightarrow \ln(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k) \geqslant \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln(x_k),$$

et donc par croissance de f sur $]0,+\infty[$,

$$\prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k} \leqslant \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Si l'un des x_k est nul, l'inégalité précédente est immédiate.

En choisissant en particulier $\alpha_1 = ... = \alpha_n = \frac{1}{n}$, de sorte que $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (]0,1[)^n$ et que $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, ..., x_n) \in ([0,+\infty[)^n,\ \sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n).$$

2. (a) Soient p et q deux réels strictement positifs vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (de sorte que l'on a même $\frac{1}{p} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et donc $p > 1$ et aussi $q > 1$).

Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité proposée est immédiate.

Soit alors a un réel strictement positif puis, pour $x \geqslant 0$, $f(x) = \frac{a^p}{p} + \frac{x^q}{q} - ax$.

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ (car $q > 1$) et pour $x \geqslant 0$, $f'(x) = x^{q-1} - a$. q étant un réel strictement plus grand que 1, $q-1$ est strictement positif et donc, la fonction $x \mapsto x^{q-1}$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Par suite,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^{q-1} > a \Leftrightarrow x > a^{1/(q-1)}.$$

f est donc strictement décroissante sur $[0, a^{1/(q-1)}]$ et strictement croissante sur $[a^{1/(q-1)}, +\infty[$. Ainsi,

$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant f(a^{1/(q-1)}) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{q/(q-1)} - a.a^{1/(q-1)}.$$

Maintenant, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ fournit $q = \frac{p}{p-1}$ puis $q - 1 = \frac{1}{p-1}$. Par suite, $\frac{q}{q-1} = p$. Il en résulte que

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{q/(q-1)} - a.a^{1/(q-1)} = (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1)a^p = 0.$$

f est donc positive sur $[0,+\infty[$, ce qui fournit $f(b) \geqslant 0$. De plus,

$$f(b) = 0 \Leftrightarrow b = a^{1/(q-1)} \Leftrightarrow b^q = a^{q/(q-1)} \Leftrightarrow b^q = a^p.$$

(b) Soient $A = \sum_{k=1}^n |a_k|^p$ et $B = \sum_{k=1}^n |b_k|^q$.

Si $A = 0$, alors $\forall k \in \{1, ..., n\}$, $a_k = 0$ et l'inégalité est immédiate. De même, si $B = 0$.

Si $A > 0$ et $B > 0$, montrons que $\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{A^{1/p}} \frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leqslant 1$.

D'après a),

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{A^{1/p}} \frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leqslant \sum_{k=1}^n (\frac{1}{p}\frac{|a_k|^p}{A} + \frac{1}{q}\frac{|b_k|^q}{B}) = \frac{1}{pA}.A + \frac{1}{qB}.B = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(c) Pour $p > 1$, la fonction $x \mapsto x^p$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$. Donc, la fonction $x \mapsto x^p$ est strictement convexe sur $]0,+\infty[$ et donc sur $[0,+\infty[$ par continuité en 0. Donc,

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in (]0,+\infty[)^n,\ \forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in ([0,+\infty[)^n \setminus \{(0, ..., 0)\},\ \left(\frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}\right)^p \leqslant \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p}{\sum_{k=1}^n \lambda_k},$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \leqslant (\sum_{k=1}^n \lambda_k)^{1-\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p)^{\frac{1}{p}}.$$

On applique alors ce qui précède à $\lambda_k = |b_k|^q$ puis $x_k = \lambda_k^{-1/p}|a_k|$ (de sorte que $\lambda_k x_k = |a_k b_k|$) et on obtient l'inégalité désirée.

(d) Pour $p=q=2$, c'est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ démontrée dans une planche précédente.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. $(X^2-1)^n$ est de degré $2n$ et donc, L_n est de degré $2n-n=n$. Puis, $\mathrm{dom}(L_n)=\mathrm{dom}((X^{2n})^{(n)})=\frac{(2n)!}{n!}$.

2. 1 et -1 sont racines d'ordre n de A_n et donc racines d'ordre $n-k$ de $A_n^{(k)}$, pour tout k élément de $\{0,...,n\}$.

   Montrons par récurrence sur k que $\forall k\in\{0,...,n\}$, $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs deux à deux distinctes de l'intervalle $]-1,1[$.

   Pour $k=1$, A_n est continu sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. De plus, $A_n(0)=A_n(1)=0$ et d'après le théorème de ROLLE, A_n' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]-1,1[$.

   Soit k élément de $\{1,...,n-1\}$. Supposons que $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs de $]-1,1[$. $A_n^{(k)}$ s'annule de plus en 1 et -1 car $k\leqslant n-1$ et donc s'annule en $k+2$ valeurs au moins de l'intervalle $[-1,1]$. D'après le théorème de ROLLE, $A_n^{(k+1)}$ s'annule en au moins $k+1$ points de $]-1,1[$ (au moins une fois par intervalle ouvert).

   On a montré que $\forall k\in\{0,...,n\}$, $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs de $]-1,1[$. En particulier, $A_n^{(n)}=L_n$ s'annule en au moins n réels deux à deux distincts de $]-1,1[$. Puisque L_n est de degré n, on a trouvé toutes les racines de L_n, toutes réelles, simples et dans $]-1,1[$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Pour $n\geqslant 1$, on a d'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^{n-1})^{(k)}(\ln(1+x))^{(n-k)}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(x^{n-1})^{(k)}(\ln(1+x))^{(n-k)}\ (\text{car } (x^{n-1})^{(n)})=0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k}(-1)^{n-1-k}\frac{(n-1-k)!}{(x+1)^{n-k}}\\ &(\text{car } (\ln(1+x))^{(n-k)}=(\frac{1}{1+x})^{(n-k-1)}).\end{aligned}$$

   Puis, pour $x=0$, $(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)}(0)=n.(n-1)!=n!$, et pour $x\neq 0$,

$$\begin{aligned}(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)}(x) &= -\frac{(n-1)!}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-\frac{x}{x+1})^{n-k}=-\frac{(n-1)!}{x}((1-\frac{x}{x+1})^{n}-1)\\ &= \frac{(n-1)!}{x}\frac{(x+1)^n-1}{(x+1)^n}.\end{aligned}$$

2. On sait dériver facilement des sommes ou plus généralement des combinaisons linéaires. Donc, on linéarise :

$$\begin{aligned}\cos^3 x\sin(2x) &= \frac{1}{8}(e^{ix}+e^{-ix})^3(-\frac{1}{4})(e^{2ix}-e^{-2ix})=-\frac{1}{32}(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix})(e^{2ix}-2+e^{-2ix})\\ &= -\frac{1}{32}(e^{5ix}+e^{3ix}-2e^{ix}-2e^{-ix}+e^{-3ix}+e^{-5ix})=-\frac{1}{16}(\cos(5x)+\cos(3x)-2\cos(x))\end{aligned}$$

Puis, pour n naturel donné :

$$(\cos^3 x \sin 2x)^{(n)} = -\frac{1}{16}(5^n \cos(5x+n\frac{\pi}{2}) + 3^n \cos(3x+n\frac{\pi}{2}) - 2cos(x+n\frac{\pi}{2})),$$

expression que l'on peut détailler suivant la congruence de n modulo 4.

3. On sait dériver des objets simples et donc on décompose en éléments simples :

$$\frac{X^2+1}{(X-1)^3} = \frac{X^2-2X+1+2X-2+2}{(X-1)^3} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{2}{(X-1)^3}.$$

Puis, pour n entier naturel donné,

$$\begin{aligned}\left(\frac{X^2+1}{(X-1)^3}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n n!}{(X-1)^{n+1}} + 2\frac{(-1)^n (n+1)!}{(X-1)^{n+2}} + \frac{(-1)^n (n+2)!}{(X-1)^{n+3}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(X-1)^{n+3}}((X-1)^2 + 2(n+1)(X-1) + (n+2)(n+1)) \\ &= \frac{(-1)^n n!(X^2+2nX+n^2+n+1)}{(X-1)^{n+3}}.\end{aligned}$$

4. La fonction proposée est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux. La formule de LEIBNIZ fournit pour $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}((x^3+2x-7)e^x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^3+2x-7)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} (x^3+2x-7)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} \\ &= ((x^3+2x-7) + n(3x^2+2) + \frac{n(n-1)}{2}(6x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.6)e^x \\ &= (x^3+3nx^2+(3n^2-3n+2)x+n^3-3n^2+4n-7)e^x.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

f est de classe $^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux.
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X] /\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$.
C'est vrai pour $n = 0$ avec $P_0 = 1$.
Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\exists P_n \in \mathbb{R}[X] /\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(n+1)}(x) = (\frac{2}{x^3}\frac{P_n(x)}{x^{3n}} + (P_n'(x)\frac{1}{x^{3n}} - 3nP_n(x)\frac{1}{x^{3n+1}})e^{-1/x^2} = \frac{P_{n+1}(x)}{3^{3(n+1)}} e^{-1/x^2},$$

où $P_n + 1 = 2P_n + X^3 P_n' - 3nX^2 P_n$ est un polynôme. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X] /\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}.$$

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel n, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$.
Pour $n = 0$, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et de plus, $\lim_{x\to 0,\, x\neq 0} f(x) = 0 = f(0)$. Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $n \geqslant 0$. Supposons que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$. Alors, d'une part f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et C^{n+1} sur $\mathbb{R}^*$ et de plus, d'après les théorèmes de croissances comparées, $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}} e^{-1/x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers 0, $x \neq 0$. D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et en particulier, $f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0,\, x\neq 0} f^{(n+1)}(x) = 0$.
On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$. f est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Montrons que $(\forall x>0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$. Soit $x>0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\Leftrightarrow x\ln(1+\frac{1}{x})<1<(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})$$
$$\Leftrightarrow x(\ln(x+1)-\ln x)<1<(x+1)(\ln(x+1)-\ln x)\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}.$$

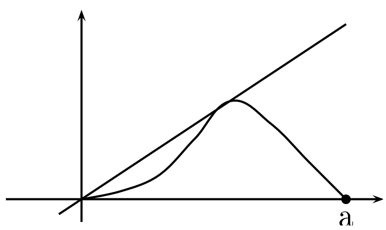
Soit x un réel strictement positif fixé. Pour $t\in[x,x+1]$, posons $f(t)=\ln t$. f est continue sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $]x,x+1[$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c dans $]x,x+1[$ tel que $f(x+1)-f(x)=(x+1-x)f'(c)$ ou encore

$$\exists c\in]x,x+1[/\ \ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{c},$$

ce qui montre que $\forall x>0,\ \frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$, et donc que

$$\forall x>0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Correction de l'exercice 10 ▲



Soit x_0 un réel non nul. Une équation de la tangente (T_{x_0}) à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. (T_{x_0}) passe par l'origine si et seulement si

$$x_0f'(x_0)-f(x_0)=0.$$

Pour x réel, on pose $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x} \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$ (g est la fonction pente à l'origine).
Puisque f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, g est déjà continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Puisque f est dérivable en 0 et que $f(0)=f'(0)=0$, g est de plus continue en 0.
Finalement, g est continue sur $[0,a]$, dérivable sur $]0,a[$ et vérifie $g(0)=g(a)(=0)$. D'après le théorème de ROLLE, il existe un réel x_0 dans $]0,a[$ tel que $g'(x_0)=0$. Puisque x_0 n'est pas nul, on a $g'(x_0)=\frac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}$.
L'égalité $g'(x_0)=0$ s'écrit $x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$ et, d'après le début de l'exercice, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 passe par l'origine.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit m un élément de $]f'(a),f'(b)[$. Puisque $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ et que $\lim_{h\to 0}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}=f'(b)$, on a (en prenant par exemple $\varepsilon=\mathrm{Min}\{m-f'(a),f'(b)-m\}>0$)

$$\exists h_1>0/\ \forall h\in]0,h_1[,\ (a+h\in I\Rightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h}<m \text{ et}$$
$$\exists h_2>0/\ \forall h\in]0,h_2[\ (b+h\in I\Rightarrow \frac{f(b+h)-f(b)}{h}>m.$$

L'ensemble $E = \{h \in]0, \text{Min}\{h_1, h_2\}[/ \ a+h \text{ et } b+h \text{ sont dans } I\}$ n'est pas vide (car I est ouvert) et pour tous les h de E, on a : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < m < \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$.

$h > 0$ est ainsi dorénavant fixé.

2. La fonction f est continue sur I et donc, la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est continue sur $[a,b]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $g(a) < m < g(b)$, $\exists y \in [a,b]/ \ g(y) = m$ ou encore $\exists y \in [a,b]/ \ \frac{f(y+h)-f(y)}{h} = m$.

   Maintenant, d'après le théorème des accroissements finis, $\exists x \in]y, y+h[\subset I/ \ m = \frac{f(y+h)-f(y)}{h} = f'(x)$.

   Donc une fonction dérivée n'est pas nécessairement continue mais vérifie tout de même le théorème des valeurs intermédiaires (Théorème de DARBOUX).

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Puisque f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 2 permet d'écrire

$$f(x+y) = f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(x) + \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt \text{ et}$$
$$f(x-y) = f(x) - yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(x) \int_x^{x-y} \frac{(x-y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
(f(x)^2) &\geqslant f(x+y)f(x-y) \\
&= (f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(x) + \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt) \times \\
&\quad (f(x) - yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(x) + \int_x^{x-y} \frac{(x-y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt) \\
&= (f(x))^2 + y^2(f(x)f''(x) - (f'(x))^2) \\
&\quad + (f(x) - yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(x)) \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt \\
&\quad + (f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(x)) \int_x^{x-y} \frac{(x-y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt \ (*)
\end{aligned}$$

Maintenant, pour $y \in [-1,1]$, ($f^{(3)}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur le segment $[-1,1]$),

$$\left| \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt \right| \leqslant |y|.\frac{y^2}{2} \text{Max}\{|f^{(3)}(t)|,\ t \in [x-1, x+1]\},$$

et donc,

$$\frac{1}{y^2} \left| \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt \right| \leqslant |y| \text{Max}\{|f^{(3)}(t)|,\ t \in [x-1, x+1]\}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand y tend vers 0. On en déduit que $\frac{1}{y^2} \left| \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt \right|$ tend vers 0 quand y tend vers 0. De même, $\frac{1}{y^2} \left| \int_x^{x-y} \frac{(x-y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt \right|$ tend vers 0 quand y tend vers 0.
On simplifie alors $(f(x)^2$ dans les deux membres de $(*)$. On divise les deux nouveaux membres par y^2 pour $y \neq 0$ puis on fait tendre y vers 0 à x fixé. On obtient $0 \geqslant f(x)f''(x) - (f'(x))^2$, qui est l'inégalité demandée.

Correction de l'exercice 13 ▲

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} = \frac{1}{2} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{(\sqrt{x})^2/2} \to -\frac{1}{2}.$$

f est donc dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$.
Autre solution. f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$. Quand x tend vers 0, f' tend vers $-\frac{1}{2}$. En résumé, f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et f' a une limite réelle quand x tend vers 0 à savoir 0. On en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et en particulier, f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soit $n \geqslant 2$ le degré de P.

1. Si P admet n racines réelles simples, le théorème de ROLLE fournit au moins $n-1$ racines réelles deux à deux distinctes pour P'. Mais, puisque P' est de degré $n-1$, ce sont toutes les racines de P', nécessairement toutes réelles et simples.

   (Le résultat tombe en défaut si les racines de P ne sont pas toutes réelles. Par exemple, $P = X^3 - 1$ est à racines simples dans $\mathbb{C}$ mais $P' = 3X^2$ admet une racine double)

2. Séparons les racines simples et les racines multiples de P. Posons $P = (X-a_1)\dots(X-a_k)(X-b_1)^{\alpha_1}\dots(X-b_l)^{\alpha_l}$ où les a_i et les b_j sont $k+l$ nombres réels deux à deux distincts et les α_j des entiers supérieurs ou égaux à 2 (éventuellement $k=0$ ou $l=0$ et dans ce cas le produit vide vaut conventionnellement 1).

   P s'annule déjà en $k+l$ nombres réels deux à deux distincts et le théorème de ROLLE fournit $k+l-1$ racines réelles deux à deux distinctes et distinctes des a_i et des b_j. D'autre part, les b_j sont racines d'ordre α_j de P et donc d'ordre $\alpha_j - 1$ de P'. On a donc trouvé un nombre de racines (comptées en nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité) égal à $k+l-1+\sum_{j=1}^{l}(\alpha_j - 1) = k + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j - 1 = n-1$ racines réelles et c'est fini.

Correction de l'exercice 15 ▲

En pensant à l'expression développée de Δ, on voit que Δ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $\Delta(a) = \Delta(b) (= 0)$ (un déterminant ayant deux colonnes identiques est nul).
Donc, d'après le théorème de ROLLE, $\exists c \in]a,b[/ \ \Delta'(c) = 0$.
Mais, pour $x \in]a,b[$, $\Delta'(x) = f'(x)(g(a) - g(b)) - g'(x)(f(a) - f(b))$ (dérivée d'un déterminant). L'égalité $\Delta'(c) = 0$ s'écrit : $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$ ce qu'il fallait démontrer.
(Remarque. Ce résultat généralise le théorème des accroissements finis ($g = Id$ est le théorème des accroissements finis.))

Correction de l'exercice 16 ▲

Puisque $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$, $\exists A > 0 / \ \forall x > 0$, $(x \geqslant A \Rightarrow xf'(x) \geqslant \frac{1}{2})$.
Soit x un réel fixé supérieur ou égal à A. $\forall t \in [A, x]$, $f'(t) \geqslant \frac{1}{2x}$ et donc, par croissance de l'intégrale, $\int_A^x f'(t)\,dt \geqslant \int_A^x \frac{1}{2t}\,dt$ ce qui fournit :

$$\forall x \geqslant A,\ f(x) \geqslant f(A) + \frac{1}{2}(\ln x - \ln A),$$

et montre que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Correction de l'exercice 17 ▲

$$\forall x \in \mathbb{R} f(\frac{x}{2} + 3) = f(f \circ f(x)) = f \circ f(f(x)) = \frac{f(x)}{2} + 3.$$

Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on obtient en dérivant $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}f'(\frac{x}{2}+3) = \frac{1}{2}f'(x)$,
et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(\frac{x}{2}+3) = f'(x).$$

Soit alors x un réel donné et u la suite définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N},\ f'(x) = f'(u_n)$. Maintenant, u est une suite arithmético-géométrique et on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 6 = \frac{1}{2^n}(u_0 - 6)$$

ce qui montre que la suite u converge vers 6. La suite $(f'(u_n))_{n\geqslant 0}$ est constante, de valeur $f'(x)$. f' étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'(u_n) = f'(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f'(6),$$

ce qui montre que la fonction f' est constante sur $\mathbb{R}$ et donc que f est affine.
Réciproquement, pour x réel, posons $f(x) = ax + b$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ a(ax+b)+b = \frac{x}{2}+3 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (a^2 - \frac{1}{2})x + ab + b - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \text{ et } (a+1)b = 3 \Leftrightarrow (a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } b = 3(2-\sqrt{2})) \text{ ou } (a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } b = 3(2+\sqrt{2})). \end{aligned}$$

On trouve deux fonctions solutions, les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 3(2-\sqrt{2}) \text{ et } f_2(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3(2+\sqrt{2}).$$

Correction de l'exercice 18 ▲

Montrons que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Pour x réel, posons $g(x) = e^x f(x)$. g est dérivable sur R et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$. Il s'agit donc maintenant de montrer que si $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}g'(x) = 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}g(x) = 0$.
Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists A > 0/\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < e^{-x}g'(x) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2}e^x \leqslant g'(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}e^x).$$

Pour x réel donné supérieur ou égal à A, on obtient en intégrant sur $[A, x]$:

$$-\frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A) = \int_A^x -\frac{\varepsilon}{2}e^t\,dt \leqslant \int_A^x g'(t)\,dt = g(x) - g(A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A),$$

et donc

$$\forall x \geqslant A,\ g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x}) \leqslant e^{-x}g(x) \leqslant g(A)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x}).$$

Maintenant, $g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x})$ et $g(A)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x})$ tendent respectivement vers $-\frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{\varepsilon}{2}$ quand x tend vers $+\infty$. Donc,

$$\exists B \geqslant A/\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant B \Rightarrow g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x}) > -\varepsilon \text{ et } < g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x}) < \varepsilon.$$

Pour $x \geqslant B$, on a donc $-\varepsilon < e^{-x}g(x) < \varepsilon$.
On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0/\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant B \Rightarrow |e - xg(x)| < \varepsilon)$ et donc $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}g(x) = 0$ ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Pour $x \geqslant -1$, posons $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $g(x) = f(x) - x$.

   Soit $u_0 \in I = [-1, +\infty[$. f est définie sur I et de plus $f(I) = [0, +\infty[\subset [-1, +\infty[$. On en déduit, par une démonstration par récurrence, que la suite u est définie.

Si la suite u converge, puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant -1$, sa limite ℓ vérifie $\ell \geqslant -1$. Puisque f est continue sur $[-1,+\infty[$ et donc en ℓ,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(ell).$$

et ℓ est un point fixe de f. Or, pour $x \geqslant -1$,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} = x &\Leftrightarrow 1+x = x^2 \text{ et } x \geqslant 0 \Leftrightarrow (x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \text{ et } x \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, si la suite (u_n) converge, c'est vers le nombre $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Pour $x \geqslant -1$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(f(x)-\alpha) &= \operatorname{sgn}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\alpha}) = \operatorname{sgn}((1+x)-(1+\alpha)) \quad (\text{par croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0,+\infty[)\\ &= \operatorname{sgn}(x-\alpha).\end{aligned}$$

Ainsi, les intervalles $[-1,\alpha[$ et $]\alpha,+\infty[$ sont stables par f. Donc, si $-1 \leqslant u_0 < \alpha$, alors par récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant u_n < \alpha$ et si $u_0 > \alpha$, alors par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \alpha$.

Soit $x \geqslant -1$. Si $x \in [-1,0]$, $\sqrt{1+x}-x \geqslant 0$ et si $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(g(x)) &= \operatorname{sgn}(\sqrt{1+x}-x)\\ &= \operatorname{sgn}((1+x)-x^2) \quad (\text{par croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0,+\infty[)\\ &= \operatorname{sgn}(x+\frac{\sqrt{5}-1}{2})(-x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}-x) = \operatorname{sgn}(\alpha-x) \text{ (car ici } x \geqslant 0).\end{aligned}$$

On en déduit que, si $x \in [-1,\alpha[$, $f(x) > x$, et si $x \in]\alpha,+\infty[$, $f(x) < x$. Mais alors, si $-1 \leqslant u_0 < \alpha$, puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant u_n < \alpha$, pour n entier naturel donné, on a

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n.$$

La suite u est donc strictement croissante, majorée par α et donc convergente. On sait de plus que sa limite est nécessairement α.

Si $u_0 > \alpha$, puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \alpha$, pour n entier naturel donné, on a

$$u_{n+1} = f(u_n) < u_n.$$

La suite u est donc strictement décroissante, minorée par α et donc convergente. On sait de plus que sa limite est nécessairement α. Enfin, si $u_0 = \alpha$, la suite u est constante.

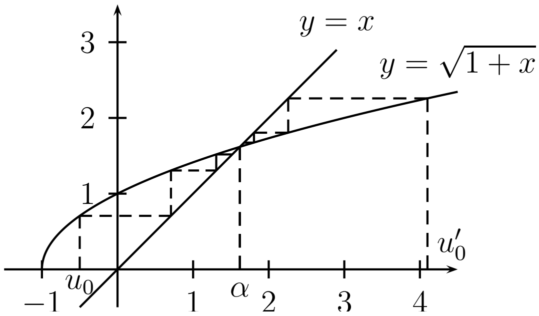
En résumé,

si $u_0 \in [-1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}[$, la suite u est strictement croissante, convergente de limite $\frac{\sqrt{5}+1}{2}[$,

si $u_0 \in]\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty[$, la suite u est strictement décroissante, convergente de limite $\frac{\sqrt{5}+1}{2}[$,

si $u_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}[$, la suite u est constante et en particulier convergente de limite $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ainsi, dans tous les cas, la suite u est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



2. Si $u_0 > 0$, alors puisque f est définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et que I est stable par f ($\forall x > 0$, $\ln(1 + x) > \ln 1 = 0$), la suite u est définie et est strictement positive. Si la suite u converge, sa limite ℓ est un réel positif **ou nul**. Par continuité de f sur $[0, +\infty[$ et donc en ℓ,

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \to +\infty} u_n) = f(\ell).$$

Pour $x > -1$, posons $g(x) = \ln(1+x) - x$. g est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour $x > -1$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}.$$

g' est strictement positive sur $]-1, 0[$ et strictement négative sur $]0, +\infty[$. g est donc strictement croissante sur $]-1, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Par suite, si $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $g(x) < 0$. En particulier, pour $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $f(x) \neq x$. Puisque $f(0) = 0$, f admet dans $]-1, +\infty[$ un et un seul point fixe à savoir 0.

En résumé, si $u_0 > 0$, la suite u est définie, strictement positive, et de plus, si la suite u converge, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Mais, pour n entier naturel donné,

$$u_{n+1} - u_n = \ln(1 + u_n) - u_n < 0.$$

Par suite, la suite u est strictement décroissante, minorée par 0 et donc, d'après ce qui précède, converge vers 0.

Si $u_0 = 0$, la suite u est constante. Il reste donc à étudier le cas où $u_0 \in]-1, 0[$. Montrons par l'absurde qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \leqslant -1$. Dans le cas contraire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$. Comme précédemment, par récurrence, la suite u est à valeurs dans $]-1, 0[$ et strictement décroissante. Etant minorée par -1, la suite u converge vers un certain réel ℓ.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n \leqslant u_0 < 0$, on a $-1 \leqslant \ell \leqslant u_0 < 0$. Donc, ou bien $\ell = -1$, ou bien f est continue en ℓ et ℓ est un point fixe de f élément de $]-1, 0[$.

On a vu que f n'admet pas de point fixe dans $]-1, 0[$ et donc ce dernier cas est exclu. Ensuite, si $\ell = -1$, il existe un rang N tel que $u_N \leqslant -0.9$. Mais alors, $u_{N+1} = \leqslant \ln(-0,9+1) = -2,3... < -1$ ce qui constitue de nouveau une contradiction.

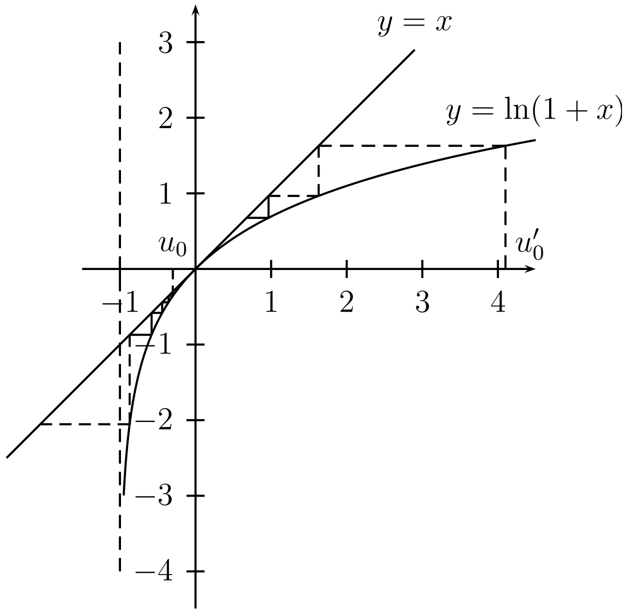
Donc, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \leqslant -1$ et la suite u n'est pas définie à partir d'un certain rang.

En résumé,

si $u_0 \in]0, +\infty[$, la suite u est strictement décroissante, convergente et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$,

si $u_0 = 0$, la suite u est constante,

et si $u_0 \in]-1, 0[$, la suite u n'est pas définie à partir d'un certain rang.



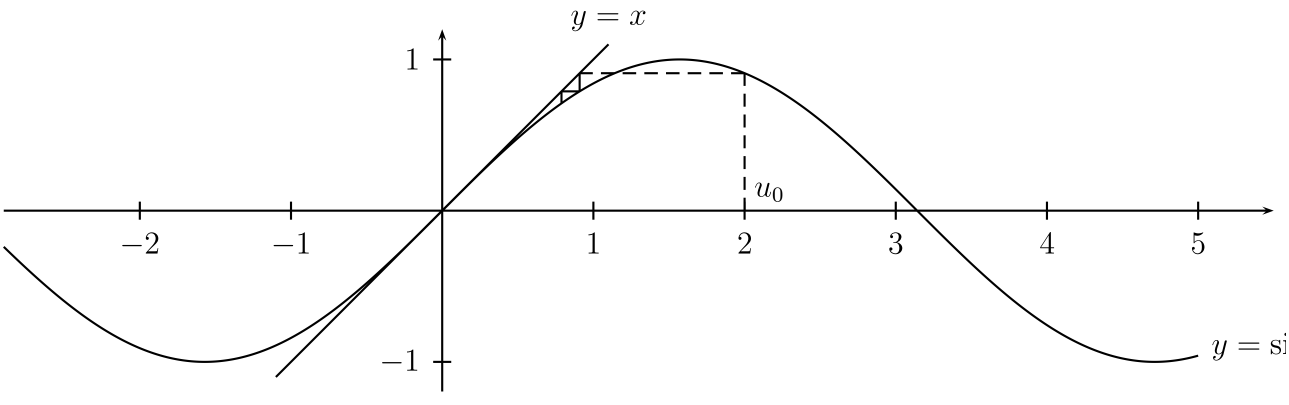
3. Pour tout choix de u_0, $u_1 \in [-1,1]$. On supposera dorénavant que $u_0 \in [-1,1]$. Si $u_0 = 0$, la suite u est constante. Si $u_0 \in [-1,0[$, considérons la suite u' définie par $u'_0 = -u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u'_{n+1} = \sin(u'_n)$. La fonction $x \mapsto \sin x$, il est clair par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u'_n = -u_n$. On supposera dorénavant que $u_0 \in]0,1]$.

   Puisque $]0,1] \subset]0,\frac{\pi}{2}]$, on a $\sin]0,1] \subset]0,1]$ et l'intervalle $I =]0,1]$ est stable par f. Ainsi, si $u_0 \in]0,1]$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$.

   Pour $x \in [0,1]$, posons $g(x) = \sin x - x$. g est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, $g'(x) = \cos x - 1$. g' est strictement négative sur $]0,1]$ et donc strictement décroissante sur $[0,1]$. On en déduit que pour $x \in]0,1]$, $g(x) < g(0) = 0$.

   Mais alors, pour n entier naturel donné, $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite u est ainsi strictement décroissante, minorée par 0 et donc converge vers $\ell \in [0,1]$. La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue sur $[0,1]$ et donc, ℓ est un point fixe de f. L'étude de g montre que f a un et un seul point fixe dans $[0,1]$ à savoir 0. La suite u est donc convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   L'étude préliminaire montre la suite u converge vers 0 pour tout choix de u_0.



4. Si u_0 est un réel quelconque, $u_1 \in [-1,1] \subset [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ puis $u_2 \in [0,1]$. On supposera dorénavant que $u_0 \in [0,1]$.

   On a $\cos([0,1]) = [\cos 1, \cos 0] = [0,504...,1] \subset [0,1]$. Donc, la fonction $x \mapsto \cos x$ laisse stable l'intervalle $I = [0,1]$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

   Pour $x \in [0,1]$, on pose $g(x) = \cos x - x$. g est somme de deux focntions strictement décroissantes sur $[0,1]$ et est donc strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus, g est continue sur $[0,1]$ et vérifie $g(0) = \cos 0 > 0$

et $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$. g s'annule donc une et une seule fois sur $[0,1]$ en un certain réel α. Ainsi, f admet sur $[0,1]$ un unique point fixe, à savoir α. Puisque f est continue sur le segment $[0,1]$, on sait que si la suite u converge, c'est vers α.

La fonction $f\ :\ x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$,

$$|f'(x)| = |-\sin x| \leqslant \sin 1 < 1.$$

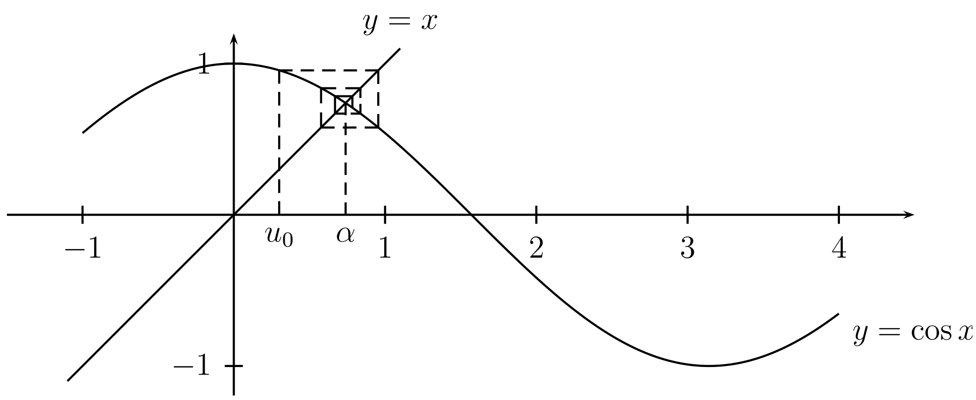
L'inégalité des accroissements finis montre alors que $\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |\cos x - \cos y| \leqslant \sin 1 |x-y|$. Pour n entier naturel donné, on a alors

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \sin 1 |u_n - \alpha|,$$

et donc, pour tout entier naturel n,

$$|u_n - \alpha| \leqslant (\sin 1)^n |u_0 - \alpha| \leqslant (\sin 1)^n.$$

Comme $0 \leqslant \sin 1 < 1$, la suite $(\sin 1)^n$ converge vers 0, et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α. On peut noter que puisque la fonction $x \mapsto \cos x$ est strictement décroissante sur $[0,1]$, les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement monotones, de sens de variations contraires (dans le cas où $u_0 \in [0,1]$. On peut noter également que si $n > \frac{\ln(10^{-2})}{\ln(\sin 1)} = 26,6...$, alors $(\sin 1)^n < 10^{-2}$. Par suite, u_{27} est une valeur approchée de α à 10^{-2} près. La machine fournit $\alpha = 0,73...$ (et même $\alpha = 0,739087042.....$).



5. Si u_0 est un réel quelconque, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in [-1,1]$. On supposera sans perte de généralité que $u_0 \in [-1,1]$. Si $u_0 = 0$, la suite u est constante et d'autre part, l'étude du cas $u_0 \in [-1,0[$ se ramème, comme en 3), à l'étude du cas $u_0 \in]0,1]$. On supposera dorénavant que $u_0 \in]0,1]$.

   Si $x \in]0,1]$, alors $2x \in]0,2] \subset]0,\pi[$ et donc $\sin(2x) \in]0,1]$. L'intervalle $I =]0,1]$ est donc stable par la fonction $f\ :\ x \mapsto \sin(2x)$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1]$.

   Pour $x \in [0,1]$, posons $g(x) = \sin(2x) - x$. g est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, $g'(x) = 2\cos(2x) - 1$. g est donc strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{4},1]$. On en déduit que si $x \in]0,\frac{\pi}{4}]$, $g(x) > g(0) = 0$. D'autre part, g est continue et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{4},1]$ et vérifie $g(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$ et $g(1) = \sin 2 - 1 < 0$. g s'annule donc une et une seule fois en un certain réel $\alpha \in]\frac{\pi}{4},1[$.

   En résumé, g s'annule une et une seule fois sur $]0,1]$ en un certain réel $\alpha \in]\frac{\pi}{4},1[$, g est strictement positive sur $]0,\alpha[$ et strictement négative sur $]\alpha,1]$.

   Supposons que $u_0 \in]0,\frac{\pi}{4}[$ et montrons par l'absurde que $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4},1]$. Dans le cas contraire, tous les u_n sont dans $]0,\frac{\pi}{4}[$. Mais alors, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) > 0.$$

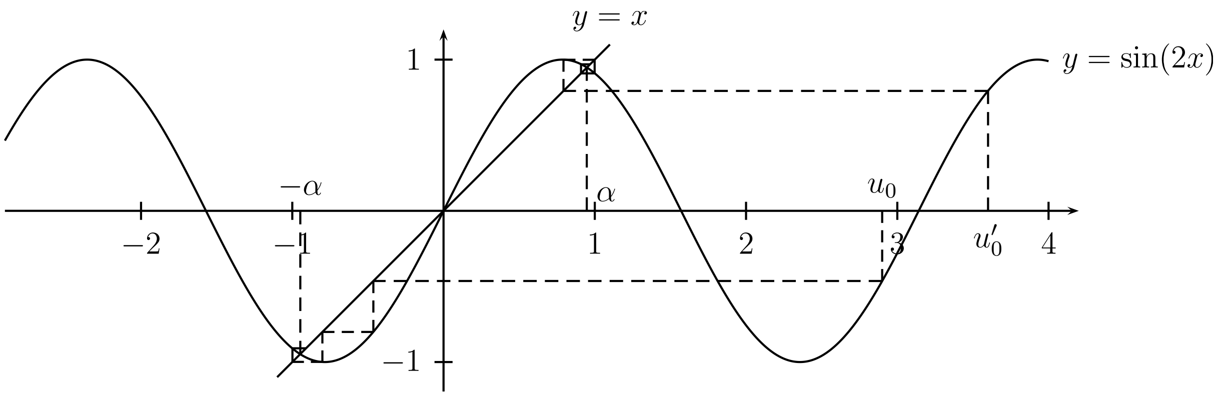
La suite u est donc strictement croissante. Etant majorée par $\frac{\pi}{4}$, la suite u converge. Comme g est continue sur $[u_0, \frac{\pi}{4}]$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [u_0, \frac{\pi}{4}]$, on sait que la limite de u est un point fixe de f élément de $[u_0, \frac{\pi}{4}]$. Mais l'étude de g a montré que f n'admet pas de point fixe dans cet intervalle (u_0 étant strictement positif). On aboutit à une contradiction.

Donc, ou bien $u_0 \in [\frac{\pi}{4}, 1]$, ou bien $u_0 \in]0, \frac{\pi}{4}[$ et dans ce cas, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4}, 1]$. Dans tous les cas, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4}, 1]$. Mais alors, puisque $f([\frac{\pi}{4}, 1]) = [\sin 2, \sin \frac{\pi}{2}] \subset [\frac{\pi}{4}, 1]$ (car $\sin 2 = 0,909... > 0,785... = \frac{\pi}{4}$), pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \in [\frac{\pi}{4}, 1]$.

Pour $x \in [\frac{\pi}{4}, 1]$, $|g'(x)| = |2\cos(2x)| \leqslant |2\cos 2|$. L'inégalité des accroissements finis montre alors que $\forall n \geqslant n_0,\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant |2\cos 2|.|u_n - \alpha|$, puis que

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \alpha| \leqslant |2\cos 2|^{n-n_0}|u_{n_0} - \alpha|.$$

Comme $|2\cos 2| = 0,83... < 1$, on en déduit que la suite u converge vers α. La machine donne par ailleurs $\alpha = 0,947....$



6. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - 2x + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2.$$

Donc, si la suite u converge, ce ne peut être que vers 1 ou 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{l} u_{n+1} - u_n = (u_n^2 - 2u_n + 2) - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2) \quad (I) \\ u_{n+1} - 1 = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \quad (II) \\ u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n = u_n(u_n - 2) \quad (III). \end{array}$$

1er cas. Si $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$, la suite u est constante.

2ème cas. Si $u_0 \in]1, 2[$, (II) et (III) permettent de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]1, 2[$. (I) montre alors que la suite u est strictement décroissante. Etant minorée par 1, elle converge vers un réel $\ell \in [1, u_0] \subset [1, 2[$. Dans ce cas, la suite (u_n) converge vers 1.

3ème cas. Si $u_0 \in]2, +\infty[$, (III) permet de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$. Mais alors, (I) montre que la suite u est strictement croissante. Si u converge, c'est vers un réel $\ell \in [u_0, +\infty[\subset]2, +\infty[$. f n'ayant pas de point fixe dans cet intervalle, la suite u diverge et, u étant strictement croissante, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4ème cas. Si $u_0 \in]0, 1[$, alors $u_1 = (u_0 - 1)^2 + 1 \in]1, 2[$ ce qui ramène au deuxième cas. La suite u converge vers 1.

5ème cas. Si $u_0 = 0$, alors $u_1 = 2$ et la suite u est constante à partir du rang 1. Dans ce cas, la suite u converge vers 2.

6ème cas. Si $u_0 < 0$, alors $u_1 = u_n^2 - 2u_n + 2 > 2$, ce qui ramène au troisième cas. La suite u tend vers $+\infty$.

En résumé, si $u_0 \in]0,2[$, la suite u converge vers 1, si $u_0 \in \{0,2\}$, la suite u converge vers 2 et si $u_0 \in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$, la suite u tend vers $+\infty$.