

## Le groupe symétrique

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile  
 I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*\*IT

Soit  $\sigma$  l'élément de  $S_{12}$  :  $\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11)$ .

1. Combien  $\sigma$  possède-t-elle d'inversions ? Que vaut sa signature ?
2. Décomposer  $\sigma$  en produit de transpositions. Retrouvez sa signature.
3. Déterminer les orbites de  $\sigma$ .
4. Déterminer  $\sigma^{2005}$ .

[Correction ▼](#)

[005353]

### Exercice 2 \*\*\*IT

Démontrer que  $S_n$  est engendré par  $\tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \dots, \tau_{1,n}$ .

[Correction ▼](#)

[005354]

### Exercice 3 \*\*\*IT

Démontrer que  $A_n$  est engendré par les cycles de longueur 3 (pour  $n \geq 3$ ).

[Correction ▼](#)

[005355]

### Exercice 4 \*\*\*I

Démontrer que  $S_n$  est engendré par  $\tau_{1,2}$  et le cycle  $(2\ 3\ \dots\ n\ 1)$ .

[Correction ▼](#)

[005356]

### Exercice 5 \*\*\*I

Soit  $(G, \times)$  un groupe. Montrer que  $(G, \times)$  est isomorphe à un sous-groupe de  $(S(G), \circ)$  et que, en particulier, tout groupe fini d'ordre  $n$  est isomorphe à un sous-groupe de  $S_n$  (théorème de CAYLEY). (Indication : montrer que pour chaque  $x$  de  $G$ , l'application  $y \mapsto xy$  est une permutation de  $G$ .)

[Correction ▼](#)

[005357]

### Exercice 6 \*\*\*

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\{1, \dots, n\}$  et  $k$  le nombre d'orbites de  $\sigma$ . Montrer que  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$ .

[Correction ▼](#)

[005358]

### Exercice 7 \*\*\*I

$\sigma$  étant une permutation de  $\{1, \dots, n\}$  donnée, on définit la matrice notée  $P_\sigma$ , carrée d'ordre  $n$  dont le terme ligne  $i$  colonne  $j$  est  $\delta_{i,\sigma(j)}$  (où  $\delta_{i,j}$  est le symbole de KRONECKER). On note  $G$  l'ensemble des  $P_\sigma$  où  $\sigma$  décrit  $S_n$ .

1. (a)  $\sigma$  et  $\sigma'$  étant deux éléments de  $S_n$ , calculer  $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ .  
 (b) En déduire que  $(G, \times)$  est un sous-groupe de  $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ , isomorphe à  $(S_n, \circ)$  (les matrices  $P_\sigma$  sont appelées matrices de permutation).

2. (Une utilisation des  $P_\sigma$ )  $A$  étant une matrice carrée donnée, calculer  $AP_\sigma$  et  $P_\sigma A$ . Que constate-t-on ?

[Correction ▼](#)

[005359]

**Exercice 8 \*\*\*I**

$A_1, A_2, \dots, A_p$  sont  $p$  matrices carrées d'ordre  $n$ , deux à deux distinctes et inversibles. On suppose que  $\{A_1, \dots, A_p\}$  est stable pour  $\times$ . Montrer que  $\{A_1, \dots, A_p\}$  est un sous groupe de  $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ .

[Correction ▼](#)

[005360]

**Exercice 9 \*\*\***

Dans  $E = \mathbb{R}^n$ , on considère l'hyperplan  $H$  d'équation  $x_1 + \dots + x_n = 0$  dans la base canonique  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $E$ .

Pour  $\sigma \in S_n$  donnée, on considère l'endomorphisme  $f_\sigma$  de  $E$  défini par :  $\forall i \in E, f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ .

On pose alors  $p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ . Montrer que  $p$  est une projection dont on déterminera l'image et la direction.

[Correction ▼](#)

[005361]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. Les inversions de  $\sigma$  sont :  $\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11)$ .

$\{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{2,7\}, \{2,8\}, \{2,10\}, \{2,11\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{3,7\}, \{3,8\}, \{6,7\}, \{6,8\}, \{9,10\}, \{9,11\}, \{9,12\}$ .

Au total, il y a  $2 + 8 + 5 + 2 + 3 = 20$  inversions.  $\sigma$  est donc une permutation paire (de signature 1).

2.  $\tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 11\ 8\ 9\ 12)$ .

Puis,  $\tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 9\ 8\ 11\ 12)$ .

Puis,  $\tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 8\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 9\ 10\ 11\ 12)$ .

Puis,  $\tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 5\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$ .

Puis,  $\tau_{7,4} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 5\ 4\ 1\ 2\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$ .

Puis,  $\tau_{5,2} \circ \tau_{7,4} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 2\ 4\ 1\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$ .

Puis,  $\tau_{1,4} \circ \tau_{5,2} \circ \tau_{7,4} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 2\ 1\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12) = \tau_{1,3}$ .

Par suite,

$$\sigma = \tau_{11,12} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{7,4} \circ \tau_{5,2} \circ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,3}.$$

3.  $O(1) = \{1, 3, 4, 7\} = O(3) = O(4) = O(7)$ , puis  $O(2) = \{2, 5, 8, 10\}$  puis  $O(6) = \{6\}$  et  $O(9) = \{9, 11, 12\} = O(11) = O(12)$ .  $\sigma$  a 4 orbites, deux de cardinal 4, une de cardinal 3 et un singleton (correspondant à un point fixe).

4.  $\sigma$  est donc le produit commutatif des cycles  $c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $c_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 10 \\ 10 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$  et  $c_3 = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 12 \\ 12 & 9 & 11 \end{pmatrix}$ .

On a  $c_1^4 = c_2^4 = Id$  et  $c_3^3 = Id$ . Or,  $2005 = 4 \cdot 1001 + 1$ . Donc,  $c_1^{2005} = c_1(c_1^4)^{1001} = c_1$ , et de même  $c_2^{2005} = c_2$ . Puis,  $c_3^{2005} = (c_3^3)^{668}c_3 = c_3$ . Puisque  $c_1, c_2$  et  $c_3$  commutent,

$$\sigma^{2005} = c_1^{2005}c_2^{2005}c_3^{2005} = c_1c_2c_3 = \sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11).$$

## Correction de l'exercice 2 ▲

$(S_n, \circ)$  est engendré par les transpositions. Il suffit donc de montrer que pour  $2 \leq i < j \leq n$ , la transposition  $\tau_{i,j}$  est produit des  $\tau_{1,k}$ ,  $2 \leq k \leq n$ .

Mais  $\tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i} = (i1j)(ji1)(i1j) = (1ij) = \tau_{i,j}$  ce qu'il fallait démontrer.

## Correction de l'exercice 3 ▲

Les éléments de  $A_n$  sont les produits pairs de transpositions. Il suffit donc de vérifier qu'un produit de deux transpositions est un produit de cycles de longueur 3.

Soient  $i, j$  et  $k$  trois éléments deux à deux distincts de  $\{1, \dots, n\}$ .  $\tau_{i,k} \circ \tau_{i,j}$  est le 3-cycle :  $i \rightarrow j$   $j \rightarrow k$   $k \rightarrow i$ , ce qui montre qu'un 3-cycle est pair et que le produit de deux transpositions dont les supports ont en commun un singleton est un 3-cycle.

Le cas  $\tau_{i,j} \circ \tau_{i,j} = Id = (231)(312)$  est immédiat. Il reste à étudier le produit de deux transpositions à supports disjoints.

Soient  $i, j, k$  et  $l$  quatre éléments de deux à deux distincts de  $\{1, \dots, n\}$ .

$$\tau_{i,j} \circ \tau_{k,l} = (jikl)(ijlk) = (jilk) = (jkil)(ljik).$$

Donc,  $\tau_{i,j} \circ \tau_{k,l}$  est un bien un produit de 3-cycles ce qui achève la démonstration.

---

### Correction de l'exercice 4 ▲

D'après l'exercice 2, il suffit de montrer que pour  $2 \leq i \leq n$ ,  $\tau_{1,i}$  peut s'écrire en utilisant uniquement  $\tau = \tau_{1,2}$  et  $c = (2 \ 3 \ \dots \ n \ 1)$ . On note que  $c^n = Id$ .

Tout d'abord, pour  $1 \leq i \leq n-1$ , étudions  $\sigma = c^{i-1} \circ \tau \circ c^{n-i+1}$ .

Soit  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

$$\begin{aligned} \tau \circ c^{n-i+1}(k) \neq c^{n-i+1}(k) \leq c^{n-i+1}(k) \in \{1, 2\} &\Leftrightarrow k \in \{c^{-n+i-1}(1), c^{-n+i-1}(2)\} \Leftrightarrow k \in \{c^{i-1}(1), c^{i-1}(2)\} \\ &\Leftrightarrow k \in \{i, i+1\}. \end{aligned}$$

Donc, si  $k \notin \{i, i+1\}$ ,

$$\sigma(k) = c^{i-1}(k)(\tau \circ c^{n-i+1}(k)) = c^{i-1}(c^{n-i+1}(k)) = c^n(k) = k,$$

et la restriction de  $\sigma$  à  $\{1, \dots, n\} \setminus \{i, i+1\}$  est l'identité de cet ensemble. Comme  $\sigma$  n'est pas l'identité puisque  $\sigma(i) \neq i$ ,  $\sigma$  est donc nécessairement la transposition  $\tau_{i,i+1}$ .

On a montré que  $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $c^{i-1} \circ \tau \circ c^{n-i+1} = \tau_{i,i+1}$ .

Vérifions maintenant que les  $\tau_{1,i}$  s'écrivent à l'aide des  $\tau_{j,j+1}$ . D'après l'exercice 2,  $\tau_{i,j} = \tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i}$ , et donc bien sûr, plus généralement,  $\tau_{i,j} = \tau_{k,i} \circ \tau_{k,j} \circ \tau_{k,i}$ .

Par suite,  $\tau_{1,i} = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i} \circ \tau_{1,2}$  puis,  $\tau_{2,i} = \tau_{2,3} \circ \tau_{3,i} \circ \tau_{2,3}$ , puis,  $\tau_{3,i} = \tau_{3,4} \circ \tau_{4,i} \circ \tau_{3,4}$  ... et  $\tau_{i-2,i} = \tau_{i-2,i-1} \circ \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1}$ . Finalement,

$$\tau_{1,i} = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \dots \circ \tau_{i-2,i-1} \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1} \circ \dots \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2},$$

ce qui achève la démonstration.

---

### Correction de l'exercice 5 ▲

Soit  $(G, \times)$  un groupe. Pour  $x$  élément de  $G$ , on considère  $f_x : G \rightarrow G$ .  $f_x$  est une application de  $G$  vers  $G$  et de plus, clairement  $f_x \circ f_{x^{-1}} = f_{x^{-1}} \circ f_x = Id_G$ . Donc, pour tout élément  $x$  de  $G$ ,  $f_x$  est une permutation de  $G$ .

Soit alors  $\varphi : (G, \times) \rightarrow (S_G, \circ)$ . D'après ce qui précède,  $\varphi$  est une application. De plus,  $\varphi$  est de plus un morphisme de groupes. En effet, pour  $(x, x', y) \in G^3$ , on a :

$$\varphi((xx'))(y) = f_{xx'}(y) = xx'y = f_x(f_{x'}(y)) = f_x \circ f_{x'}(y) = (\varphi(x) \circ \varphi(x'))(y),$$

et donc  $\forall (x, x') \in G^2$ ,  $\varphi(xx') = \varphi(x) \circ \varphi(x')$ .

Enfin,  $\varphi$  est injectif car, pour  $x$  élément de  $G$  :

$$\varphi(x) = Id \Rightarrow \forall y \in G, xy = y \Rightarrow xe = e \Rightarrow x = e.$$

Donc,  $\text{Ker } \varphi = \{e\}$ , et  $\varphi$  est injectif.

$\varphi$  est ainsi un isomorphisme de groupes de  $(G, \times)$  sur  $(f(G), \circ)$  qui est un sous groupe de  $(S_G, \circ)$ .  $(G, \times)$  est bien isomorphe à un sous groupe de  $(S_G, \circ)$ .

---

### Correction de l'exercice 6 ▲

Montrons d'abord par récurrence sur  $l \geq 2$  que la signature d'un cycle de longueur  $l$  est  $(-1)^{l-1}$ .

C'est connu pour  $l = 2$  (signature d'une transposition).

Soit  $l \geq 2$ . Supposons que tout cycle de longueur  $l$  ait pour signature  $(-1)^{l-1}$ . Soit  $c$  un cycle de longueur  $l+1$ .

On note  $\{x_1, x_2, \dots, x_{l+1}\}$  le support de  $c$  et on suppose que, pour  $1 \leq i \leq l$ ,  $c(x_i) = x_{i+1}$  et que  $c(x_{l+1}) = x_1$ .

Montrons alors que  $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$  est un cycle de longueur  $l$ .  $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$  fixe déjà  $x_{l+1}$  puis, si  $1 \leq i \leq l-1$ ,  $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c(x_i) = \tau_{x_1, x_{l+1}}(x_{i+1}) = x_{i+1}$  (car  $x_{i+1}$  n'est ni  $x_1$ , ni  $x_{l+1}$ ), et enfin  $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c(x_l) = \tau_{x_1, x_{l+1}}(x_{l+1}) = x_1$ .

$\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$  est donc bien un cycle de longueur  $l$ . Par hypothèse de récurrence,  $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$  a pour signature  $(-1)^{l-1}$  et donc,  $c$  a pour signature  $(-1)^{(l+1)-1}$ .

Montrons maintenant que si  $\sigma$  est une permutation quelconque de  $\{1, \dots, n\}$  ayant  $k$  orbites la signature de  $\sigma$  est  $(-1)^{n-k}$ .

Si  $\sigma$  est l'identité,  $\sigma$  a  $n$  orbites et le résultat est clair.

Si  $\sigma$  n'est pas l'identité, on décompose  $\sigma$  en produit de cycles à supports disjoints.

Posons  $\sigma = c_1 \dots c_p$  où  $p$  désigne le nombre d'orbites de  $\sigma$  non réduites à un singleton et donc  $k-p$  est le nombre de points fixes de  $\sigma$ . Si  $l_i$  est la longueur de  $c_i$ , on a donc  $n = l_1 + \dots + l_p + (k-p)$  ou encore  $n-k = l_1 + \dots + l_p - p$ .

Mais alors,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^p \varepsilon(c_i) = \prod_{i=1}^p (-1)^{l_i-1} = (-1)^{l_1+ \dots + l_p - p} = (-1)^{n-k}.$$


---

### Correction de l'exercice 7 ▲

1. (a) Soient  $\sigma$  et  $\sigma'$  deux éléments de  $S_n$ . Soit  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ . Le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$  de  $P_\sigma P_{\sigma'}$  vaut

$$\sum_{k=1}^n \delta_{i, \sigma(k)} \delta_{k, \sigma'(j)} = \delta_{i, \sigma(\sigma'(j))},$$

et est donc aussi le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$  de la matrice  $P_{\sigma \circ \sigma'}$ . Par suite,

$$\forall (\sigma, \sigma') \in (S_n)^2, P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}.$$

- (b) Soit  $\sigma \in S_n$ . D'après a),  $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma \circ \sigma^{-1}} = P_{Id} = I_n = P_{\sigma^{-1}} P_\sigma$ . On en déduit que toute matrice  $P_\sigma$  est inversible, d'inverse  $P_{\sigma^{-1}}$ . Par suite,  $G \subset GL_n(\mathbb{R})$  (et clairement,  $G \neq \emptyset$ ).

Soit alors  $(\sigma, \sigma') \in (S_n)^2$ .

$$P_\sigma P_{\sigma'}^{-1} = P_\sigma P_{\sigma'^{-1}} = P_{\sigma \circ \sigma'^{-1}} \in G.$$

On a montré que  $G$  est un sous-groupe de  $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ .

Soit  $\varphi : S_n \rightarrow G$ . D'après a),  $\varphi$  est un morphisme de groupes.  $\varphi$  est clairement surjectif. Il

$$\sigma \mapsto P_\sigma$$

reste à vérifier que  $\varphi$  est injectif.

Soit  $\sigma \in S_n$ .

$$\begin{aligned} \sigma \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow P_\sigma = I_n \Rightarrow \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \delta_{i, \sigma(j)} = \delta_{i, j} \\ \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \delta_{i, \sigma(i)} = 1 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sigma(i) = i \\ \Rightarrow \sigma = Id. \end{aligned}$$

Puisque le noyau du morphisme  $\varphi$  est réduit à  $\{Id\}$ ,  $\varphi$  est injectif.

Ainsi,  $\varphi$  est un isomorphisme du groupe  $(S_n, \circ)$  sur le groupe  $(G, \times)$  et on a montré que  $(G, \times)$  est un sous-groupe de  $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ , isomorphe à  $(S_n, \circ)$ .

2. Soit  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ . Le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$  de  $AP_\sigma$  vaut :

$$\sum_{k=1}^n a_{i, k} \delta_{k, \sigma(j)} = a_{i, \sigma(j)}.$$

Ainsi, l'élément ligne  $i$ , colonne  $j$ , de  $AP_\sigma$  est l'élément ligne  $i$ , colonne  $\sigma(j)$ , de  $A$ , ou encore, si  $j$  est un élément donné de  $\{1, \dots, n\}$ , la  $j$ -ème colonne de  $AP_\sigma$  est la  $\sigma(j)$ -ème colonne de  $A$ . Ainsi, si on note

$C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$  (et donc  $A = (C_1, \dots, C_n)$ ), alors  $AP_\sigma = (C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)})$ . En clair, multiplier  $A$  par  $P_\sigma$  à droite a pour effet d'appliquer la permutation  $\sigma$  aux colonnes de  $A$  (puisque  $P_\sigma$  est inversible, on retrouve le fait que permuter les colonnes de  $A$  ne modifie pas le rang de  $A$ ).

De même, le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$ , de  $P_\sigma A$  vaut

$$\sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma(k)} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{\sigma^{-1}(i),k} a_{k,j} = a_{\sigma^{-1}(i),j},$$

(on a utilisé  $\sigma(k) = i \Leftrightarrow k = \sigma^{-1}(i)$ ) et multiplier  $A$  par  $P_\sigma$  à gauche a pour effet d'appliquer la permutation  $\sigma^{-1}$  aux lignes de  $A$ .

---

### Correction de l'exercice 8 ▲

$G = \{A_1, \dots, A_p\}$  est déjà une partie non vide de  $GL_n(\mathbb{R})$ , stable pour  $\times$ . Il reste à vérifier que  $G$  est stable pour le passage à l'inverse.

Soient  $i \in \{1, \dots, n\}$ , puis  $\varphi_i : G \rightarrow G$ . Puisque  $G$  est stable pour le produit,  $\varphi_i$  est une application de  $A \mapsto A_i A$

$G$  dans  $G$ .

Montrons que  $\varphi_i$  est injective. Soit  $(A, B) \in G$ .

$$\varphi_i(A) = \varphi_i(B) \Rightarrow A_i A = A_i B \Rightarrow A_i^{-1} A_i A = A_i^{-1} A_i B \Rightarrow A = B.$$

Donc,  $\varphi_i$  est une application injective de l'ensemble **fini**  $G$  dans lui-même. On sait alors que  $\varphi_i$  est une permutation de  $G$ .

Par  $\varphi_i$ ,  $A_i$  a un antécédent  $A$  dans  $G$ .  $A_i A = A_i$  fournit  $A_i^{-1} A_i A = A_i^{-1} A_i$  puis  $A = I \in G$ . Ainsi,  $G$  contient la matrice  $I$ . Ensuite,  $I$  a un antécédent par  $\varphi_i$  dans  $G$ . Donc, il existe  $B \in G$  telle que  $A_i B = I$ . Mais alors  $A_i^{-1} = B \in G$ .

$G$  est bien stable pour le passage à l'inverse et est donc un sous-groupe de  $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ .

---

### Correction de l'exercice 9 ▲

Pour  $(x_1, \dots, x_n) \in E$ , on pose  $\varphi((x_1, \dots, x_n)) = x_1 + \dots + x_n$ .  $\varphi$  est une forme linéaire non nulle sur  $E$  et  $H$  est le noyau de  $\varphi$ .  $H$  est donc bien un hyperplan de  $E$ .

Il est clair que, pour  $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$ ,  $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma \circ \sigma'}$ .  $(\mathcal{L}(E), +, .)$  est un espace vectoriel et donc,  $p$  est bien un endomorphisme de  $E$ .

$$p^2 = \frac{1}{n!^2} \left( \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma \right)^2 = \sum_{(\sigma, \sigma') \in (S_n)^2} f_\sigma \circ f_{\sigma'}.$$

Mais,  $(S_n, \circ)$  est un groupe fini. Par suite, l'application  $S_n \rightarrow S_n$ , injective (même démarche que dans l'exercice 8), est une permutation de  $S_n$ . On en déduit que, pour  $\sigma'$  donnée,  $\sum_{\sigma \in S_n} f_{\sigma \circ \sigma'} = \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ . Ainsi, en posant  $q = n!p$ .

$$p^2 = \frac{1}{n!^2} \sum_{\sigma' \in S_n} \left( \sum_{\sigma \in S_n} f_{\sigma \circ \sigma'} \right) = \frac{1}{n!^2} \sum_{\sigma' \in S_n} q = \frac{1}{n!^2} \cdot n!q = \frac{1}{n!} q = p.$$

$p$  est donc une projection. Déterminons alors l'image et le noyau de  $p$ . Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

$$p(e_i) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma(e_i) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e_{\sigma(i)}.$$

Maintenant, il y a (bien sûr) autant de permutations  $\sigma$  telles que  $\sigma(i) = 1$ , que de permutations  $\sigma$  telles que  $\sigma(i) = 2, \dots$  ou de permutations  $\sigma$  telles que  $\sigma(i) = n$ , à savoir  $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ . Donc,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, p(e_i) = \frac{1}{n!} \frac{n!}{n} \sum_{k=1}^n e_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k.$$

Posons  $u = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k$ . D'après ce qui précède,

$$\text{Im } p = \text{Vect}(p(e_1), \dots, p(e_n)) = \text{Vect}(u).$$

Ensuite, si  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  est un élément de  $E$ ,

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n x_k p(e_k) = 0 \Leftrightarrow \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) u = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n x_k = 0 \Leftrightarrow x \in H.$$

Ainsi,  $p$  est la projection sur  $\text{Vect}(u)$  parallèlement à  $H$ .

---