Le binôme. Les symboles $\sum$ et $\prod$

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 IT Identités combinatoires

La difficulté va en augmentant graduellement de facile à assez difficile sans être insurmontable.

1. Calculer $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}$.
2. Montrer que $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+... = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+...$ et trouver la valeur commune des deux sommes.
3. Calculer les sommes $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+...$ et $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+...$.
4. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.
5. Montrer que $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+...+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$ (utiliser le polynôme $(1+x)^{2n}$).
6. Calculer les sommes $0.\binom{n}{0}+1.\binom{n}{1}+...+n.\binom{n}{n}$ et $\frac{\binom{n}{0}}{1}+\frac{\binom{n}{1}}{2}+...+\frac{\binom{n}{n}}{n+1}$ (considérer dans chaque cas un certain polynôme astucieusement choisi).
7. Montrer que $\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}...+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p+1}$ où $0\leqslant p\leqslant n$. Interprétation dans le triangle de PASCAL ?
8. (a) Soit $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n\,dx$. Trouver une relation de récurrence liant I_n et I_{n+1} et en déduire I_n en fonction de n (faire une intégration par parties dans I_n-I_{n+1}).
   (b) Démontrer l'identité valable pour $n\geqslant 1$: $1-\frac{\binom{n}{1}}{3}+\frac{\binom{n}{2}}{5}+...+(-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{2n+1}=\frac{2.4.....(2n)}{1.3...(2n+1)}$.

Correction ▼ [005137]

Exercice 2 **

Quel est le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans le développement de $(a-b+2c)^9$.

Correction ▼ [005138]

Exercice 3 **I

Développer $(a+b+c+d)^2$ et $(a+b+c)^3$.

Correction ▼ [005139]

Exercice 4 ***

Soit $(n,a,b)\in\mathbb{N}^*\times]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Quel est le plus grand terme du développement de $(a+b)^n$?

Correction ▼ [005140]

Exercice 5 *

Résoudre dans $\mathbb{N}*$ l'équation $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=5n$.

Correction ▼ [005141]

Exercice 6 IT

Cet exercice est consacré aux sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.

1. (*) Calculer $\sum_{i=3}^{n} i$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$, $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7)$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$.
2. (*) Calculer le nombre $1,1111... = \lim_{n\to+\infty} 1,\underbrace{11...1}_{n}$ et le nombre $0,9999... = \lim_{n\to+\infty} 0,\underbrace{99...9}_{n}$.
3. (*) Calculer $\underbrace{1-1+1-...+(-1)^{n-1}}_{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. (*) Calculer $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+... = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$.
5. (**) Calculer $\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.
6. (**) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$.
7. (***) Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$. Déterminer$\lim_{n\to+\infty} S_n$.
8. (**) On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
   (a) Calculer la suite $(u_n-3)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Correction ▼ [005142]

Exercice 7 Sommes télescopiques

Calculer les sommes suivantes :

1. (**) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
2. (***) Calculer $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1,2,3,4\}$ (dans chaque cas, chercher un polynôme P_p de degré $p+1$ tel que $P_p(x+1)-P_p(x) = x^p$).
3. (**) Calculer $\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{k^2+k+1}$ (aller relire certaines formules établies dans une planche précédente).
4. (**) Calculer $\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{k^2}$.

Correction ▼ [005143]

Exercice 8 I

Calculer les sommes suivantes :

1. (**) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1$.
2. (**) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ et $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j$.
3. (*) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$.
4. (***) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}(5h^4-18h^2k^2+5k^4)$. Déterminer$\lim_{n\to+\infty} u_n$ (utiliser les résultats de l'exercice 7, 2)).

Correction ▼ [005144]

Exercice 9 I

1. (*) Calculer $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (***) Calculer $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k}$, $a \in]0,\pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction ▼ [005145]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. D'après la formule du binôme de NEWTON,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n.}$$

2. Soit n un entier naturel non nul. Posons $S_1=\sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}$ et $S_2=\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}$. Alors

$$S_1-S_2=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(1-1)^n=0 \text{ (car } n\geqslant 1),$$

et donc $S_1=S_2$. Puis $S_1+S_2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$, et donc $S_1=S_2=2^{n-1}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=2^{n-1}.}$$

3. En posant $j=e^{2i\pi/3}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n,\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}j^k=(1+j)^n \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}j^{2k}=(1+j^2)^n.$$

En additionnant ces trois égalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+j^k+j^{2k})=2^n+(1+j)^n+(1+j^2)^n.$$

Maintenant,

- si $k\in 3\mathbb{N}$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $k=3p$ et $1+j^k+j^{2k}=1+(j^3)^p+(j^3)^{2p}=3$ car $j^3=1$.
- si $k\in 3\mathbb{N}+1$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $k=3p+1$ et $1+j^k+j^{2k}=1+j(j^3)^p+j^2(j^3)^{2p}=1+j+j^2=0$
- si $k\in 3\mathbb{N}+2$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $k=3p+2$ et $1+j^k+j^{2k}=1+j^2(j^3)^p+j^4(j^3)^{2p}=1+j^2+j=0$.

Finalement, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+j^k+j^{2k})=3\sum_{k=0}^{E(n/3)}\binom{n}{3k}$. Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{E(n/3)}\binom{n}{3k}&=\frac{1}{3}(2^n+(1+j)^n+(1+j^2)^n)=\frac{1}{3}(2^n+2\,\mathrm{Re}((1+j)^n))\\&=\frac{1}{3}(2^n+2\,\mathrm{Re}((-j^2)^n))=\frac{1}{3}(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3})\end{aligned}$$

4. Pour $1\leqslant k\leqslant n$, on a

$$k\binom{n}{k}=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=k\binom{n-1}{k-1}.$$

5. $\binom{2n}{n}$ est le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$. Mais d'autre part ,

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n=(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k)(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k).$$

Dans le développement de cette dernière expression, le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ ou encore $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients et donc

$$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

1ère solution. Pour x réel, posons $P(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$.
Pour x réel,

$$P(x) = (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k)' = ((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

2ème solution. D'après 4),

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

1ère solution. Pour x réel, posons $P(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}$. On a

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n,$$

et donc, pour x réel,

$$P(x) = P(0) + \int_0^x P'(t)\,dt = \int_0^1 (1+t)^n\,dt = \frac{1}{n+1}((1+x)^{n+1} - 1).$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

2ème solution. D'après 4), $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}((1+1)^{n+1}-1) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

7. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-p$, $\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$ (ce qui reste vrai pour $k = p$ en tenant compte de $\binom{p}{p+1} = 0$).
Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-p}\binom{p+k}{p} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-p}\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1} = 1 + \sum_{k=2}^{n-p+1}\binom{p+k}{p+1} - \sum_{k=1}^{n-p}\binom{p+k}{p+1}\\ &= 1 + \binom{n+1}{p+1} - 1 = \binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

Interprétation dans le triangle de Pascal. Quand on descend dans le triangle de Pascal, le long de la colonne p, du coefficient $\binom{p}{p}$ (ligne p) au coefficient $\binom{p}{n}$ (ligne n), et que l'on additionne ces coefficients, on trouve $\binom{n+1}{p+1}$ qui se trouve une ligne plus bas et une colonne plus loin.

8. (a) Pour n naturel donné, posons $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$. Une intégration par parties fournit:

$$\begin{aligned}I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 ((1-x^2)^n - (1-x^2)^{n+1})\,dx = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n\,dx = \int_0^1 x.x(1-x^2)^{n+1}\,dx\\ &= \left[-x\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^1 + \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 (1-x^2)^{n+1}\,dx = \frac{1}{2(n+1)}I_{n+1}\end{aligned}$$

et donc $2(n+1)(I_n - I_{n+1}) = I_{n+1}$ ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n.$$

On a déjà $I_0 = 1$. Puis, pour $n \geqslant 1$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\ldots\frac{2}{3} I_0 = \frac{(2n)(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3.1}.$$

(b) Pour n naturel non nul donné :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\binom{n}{1}}{3} + \frac{\binom{n}{2}}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{2n+1} &= \int_0^1 \left(1 - \binom{n}{1} x^2 + \binom{n}{2} x^4 + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} x^{2n}\right) dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = I_n = \frac{(2n)(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3.1}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

La formule du binôme de NEWTON fournit

$$(a-b+2c)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (a-b)^k (2c)^{9-k} = (a-b)^9 + \ldots + \binom{9}{6} (a-b)^6 (2c)^3 + \ldots + (2c)^9.$$

Ensuite,

$$(a-b)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} a^k (-b)^{6-k} = a^6 - \ldots + \binom{6}{4} a^4 b^2 - .. + b^6.$$

Le coefficient cherché est donc

$$\binom{9}{6}\binom{6}{4} 2^3 = \frac{9.8.7}{3.2}\frac{6.5}{2}.2^3 = 3.4.7.3.5.8 = 10080.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

et

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) + 6abc.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit n un entier naturel non nul. Le terme général du développement de $(a+b)^n$ est $u_k = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\binom{n}{k+1} a^{k+1} b^{n-k-1}}{\binom{n}{k} a^k b^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1}\frac{a}{b}.$$

Par suite,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \Leftrightarrow \frac{n-k}{k+1}\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow (n-k)a > (k+1)b \Leftrightarrow k < \frac{na-b}{a+b}.$$

1er cas. Si $\frac{na-b}{a+b} > n-1$ (ce qui équivaut à $n < \frac{a}{b}$), alors la suite $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est strictement croissante et le plus grand terme est le dernier : a^n.

2ème cas. Si $\frac{na-b}{a+b} \leqslant 0$ (ce qui équivaut à $n \leqslant \frac{b}{a}$), alors la suite $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est strictement décroissante et le plus grand terme est le premier : b^n.

3ème cas. Si $0 < \frac{na-b}{a+b} \leqslant n-1$. Dans ce cas, la suite est strictement croissante puis éventuellement momentanément constante, suivant que $\frac{na-b}{a+b}$ soit un entier ou non, puis strictement décroissante (on dit que la suite u est unimodale).

Si $\frac{na-b}{a+b} \notin \mathbb{N}$, on pose $k = E(\frac{na-b}{a+b})+1$, la suite u croit strictement jusqu'à ce rang puis redécroit strictement. Le plus grand des termes est celui d'indice k, atteint une et une seule fois.

Si $\frac{na-b}{a+b} \in \mathbb{N}$, le plus grand des termes est atteint deux fois à l'indice k et à l'indice $k+1$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Pour $n \geqslant 3$,

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{2} = 5n \Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n$$
$$\Leftrightarrow n(-24+3(n-1)+(n-1)(n-2)) = 0 \Leftrightarrow n^2-25 = 0$$
$$\Leftrightarrow n = 5.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soit $n \geqslant 3$.

$$\sum_{i=3}^{n} i = \frac{(3+n)(n-2)}{2} = \frac{(n-2)(n+3)}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{(1+(2n-1))n}{2} = n^2$$

et

$$\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7) = \frac{(19+3n+10)(n-2)}{2} = \frac{1}{2}(3n+29)(n-2) = \frac{1}{2}(3n^2+23n-58).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = 1,\underbrace{11...1}_{n}$. On a

$$u_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{10^k} = 1+\frac{1}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = 1+\frac{1}{9}(1-\frac{1}{10^n}) = \frac{10}{9}-\frac{1}{9.10^n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{9.10^n}$ tend vers 0, et donc, u_n tend vers $\frac{10}{9}$.

$$\boxed{1,11111.... = \frac{10}{9}.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = 0,\underbrace{99...9}_{n}$. On a

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{10^n}$ tend vers 0, et donc, u_n tend vers 1.

$$\boxed{0,9999.... = 1.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = \underbrace{1-1+1-...+(-1)^{n-1}}_{n}$. On a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k = \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{1}{2}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+... = 1.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{2} &= \mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\pi/2})(= \mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n} i^k)) \\
&= \mathrm{Re}(\frac{1-e^{(n+1)i\pi/2}}{1-e^{i\pi/2}}) = \mathrm{Re}(\frac{e^{i(n+1)\pi/4}}{e^{i\pi/4}}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{-2i\sin\frac{\pi}{4}}) = \sqrt{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{4} + \frac{1}{2} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in 4\mathbb{N}\cup(4\mathbb{N}+1) \\ 0 \text{ si } n \in (4\mathbb{N}+2)\cup(4\mathbb{N}+3) \end{cases}
\end{aligned}$$

En fait, on peut constater beaucoup plus simplement que $\cos 0 + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi + \cos\frac{3\pi}{2} = 1+0-1+0 = 0$, on a immédiatement $S_{4n} = 1$, $S_{4n+1} = S_{4n}+0 = 1$, $S_{4n+2} = S_{4n+1}-1 = 0$ et $S_{4n+3} = S_{4n+2}+0 = 0$.

6. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $C_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$. Alors, d'après la formule de MOIVRE,

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n}(e^{i\theta})^k.$$

- 1er cas. Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{i\theta} \neq 1$. Par suite,

$$C_n + iS_n = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{i\theta(n+1-1)/2}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = e^{in\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Par suite,

$$C_n = \mathrm{Re}(C_n+iS_n) = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \mathrm{Im}(C_n+iS_n) = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

- 2ème cas. Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $C_n = n+1$ et $S_n = 0$.

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \begin{cases} \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 \text{ si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \begin{cases} \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 \text{ si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.}$$

7. Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $-x \neq 1$, on a

$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}(1-(-x)^n).$$

Par suite,

$$S_n(x) = S_n(0) + \int_0^x S_n'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt.$$

Mais alors,

$$|S_n(x) - \ln(1+x)| = \left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt\right| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right|\,dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}x^{k-1} = \ln(1+x).}$$

En particulier,

$$\boxed{\ln 2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)}.$$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3)$. La suite $(u_n - 3)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique, de raion $q = 2$ et de premier terme $u_0 - 3 = -2$. On en déduit que, pour n enteir naturel donné, $u_n - 3 = -2.2^n$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 - 2^{n+1}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 3 - 2\sum_{k=0}^{n} 2^k = 3(n+1) - 2\frac{2^{n+1}-1}{2-1} = -2^{n+2} + 3n + 5.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Pour tout naturel non nul k, on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Pour tout naturel non nul k, on a $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$, et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Calcul de $\mathbf{S_1}$. Posons $P_1 = aX^2 + bX + c$. On a

$$P_1(X+1) - P_1(X) = a((X+1)^2 - X^2) + b((X+1) - X) = 2aX + (a+b).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_1(X+1) - P_1(X) = X &\Leftrightarrow 2a = 1 \text{ et } a+b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \\ &\Leftarrow P_1 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} = \frac{X(X-1)}{2}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (P_1(k+1) - P_1(k)) = P_1(n+1) - P_1(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Calcul de $\mathbf{S_2}$. Posons $P_2 = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a

$$P_2(X+1) - P_2(X) = a((X+1)^3 - X^3) + b((X+1)^2 - X^2) + c((X+1) - X) = 3aX^2 + (3a+2b)X + a + b + c.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_2(X+1) - P_2(X) = X^2 &\Leftrightarrow 3a = 1 \text{ et } 3a + 2b = 0 \text{ et } a+b+c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{6} \\ &\Leftarrow P_2 = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6} = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (P_2(k+1) - P_2(k)) = P_2(n+1) - P_2(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Calcul de $\mathbf{S_3}$. Posons $P_3 = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. On a

$$\begin{aligned} P_3(X+1) - P_3(X) &= a((X+1)^4 - X^4) + b((X+1)^3 - X^3) + c((X+1)^2 - X^2) + d((X+1) - X) \\ &= 4aX^3 + (6a+3b)X^2 + (4a+3b+2c)X + a + b + c + d. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_3(X+1) - P_3(X) = X^3 &\Leftrightarrow 4a = 1,\ 6a + 3b = 0,\ 4a + 3b + 2c = 0 \text{ et } a+b+c+d = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{4} \text{ et } d = 0 \\ &\Leftarrow P_3 = \frac{X^4}{4} - \frac{X^3}{2} + \frac{X^2}{4} = \frac{X^2(X-1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} (P_3(k+1) - P_3(k)) = P_3(n+1) - P_3(1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- Calcul de S_4. Posons $P_4 = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$. On a

$$\begin{aligned}P_4(X+1) - P_4(X) &= a((X+1)^5 - X^5) + b((X+1)^4 - X^4) + c((X+1)^3 - X^3) + d((X+1)^2 - X^2) \\ &\quad + e((X+1) - X) \\ &= 5aX^4 + (10a+4b)X^3 + (10a+6b+3c)X^2 + (5a+4b+3c+2d)X + a+b+c+d+e.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}P_4(X+1) - P_4(X) = X^4 &\Leftrightarrow 5a = 1,\ 10a+4b = 0,\ 10a+6b+3c = 0,\ 5a+4b+3c+2d = 0 \\ &\quad \text{et } a+b+c+d+e = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{3},\ d = 0 \text{ et } e = -\frac{1}{30} \\ &\Leftarrow P_4 = \frac{X^5}{5} - \frac{X^4}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X}{30} = \frac{X(X-1)(6X^3 - 9X^2 + X + 1)}{30}.\end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \sum_{k=1}^{n} (P_4(k+1) - P_4(k)) = P_4(n+1) - P_4(1) = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}.$$

$$\boxed{\begin{gathered}\forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \textstyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \\ \text{et } \textstyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.\end{gathered}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   On rappelle que

$$\boxed{\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2,\ \arctan a - \arctan b = \arctan \tfrac{a-b}{1+ab}.}$$

   Soit alors k un entier naturel non nul. On a

$$\arctan \frac{1}{k^2+k+1} = \arctan \frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan k.$$

   Par suite,

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{k^2+k+1} = \sum_{k=1}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan k) = \arctan(n+1) - \arctan 1 = \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   Pour k entier naturel non nul donné, on a

$$\arctan \frac{2}{k^2} = \arctan \frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan(k-1).$$

   Par suite,

$$\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}(\arctan(k+1)-\arctan(k-1))=\sum_{k=1}^{n}\arctan(k+1)-\sum_{k=1}^{n}\arctan(k-1)$$
$$=\sum_{k=2}^{n+1}\arctan k-\sum_{k=0}^{n-1}\arctan k=\arctan(n+1)+\arctan n-\arctan 1-\arctan 0$$
$$=\arctan(n+1)+\arctan n-\frac{\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Parmi les n^2 couples (i,j) tels que $1\leqslant i,j\leqslant n$, il y en a n tels que $i=j$ et donc $n^2-n=n(n-1)$ tels que $1\leqslant i,j\leqslant n$ et $i\neq j$. Comme il y a autant de couples (i,j) tels que $i>j$ que de couples (i,j) tels que $i<j$, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ couples (i,j) tels que $1\leqslant i<j\leqslant n$. Finalement,
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}j\right)=\sum_{j=1}^{n}nj=n\sum_{j=1}^{n}j=n.\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2(n+1)}{2}.$$
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}j=\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}j\right)=\sum_{j=2}^{n}(j-1)j=\sum_{j=2}^{n}j^2-\sum_{j=2}^{n}j$$
$$=(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1)-(\frac{n(n+1)}{2}-1)=\frac{n(n+1)}{2}(\frac{2n+1}{3}-1)$$
$$=\frac{n(n+1)^2}{6}.$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}ij=(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}i)(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}j)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
$$\sum_{1\leqslant h,k\leqslant n}h^2k^2=\sum_{h=1}^{n}(h^2\sum_{k=1}^{n}k^2)=(\sum_{k=1}^{n}k^2)(\sum_{h=1}^{n}h^2)=\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2.$$
Comme d'autre part, $\sum_{h=1}^{n}h^4=\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$, on a
$$\sum_{1\leqslant h,k\leqslant n}h^4=\sum_{h=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}h^4)=\sum_{h=1}^{n}nh^4=n\sum_{h=1}^{n}h^4=\frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},$$
et bien sûr $\sum_{1\leqslant h,k\leqslant n}k^4=\frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Par suite,

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{n^5}\left(2.5\frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n+14)}{30} - 18\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}\right)\\ &= \frac{1}{n^5}(2n^6-2n^6+n^5(\frac{15}{3}-\frac{12}{2})+\text{termes de degré au plus } 4)\\ &= -1+\text{termes tendant vers } 0\end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -1.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

2. Soit $a \in]0,\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout naturel non nul k, on a $0 < \frac{a}{2^k} \leqslant \frac{a}{2} < \frac{\pi}{2}$ et donc $\sin\frac{a}{2^k} \neq 0$. On sait alors que pour tout réel x, $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$. Par suite, pour tout naturel k,

$$\sin(2.\frac{a}{2^k}) = 2\sin\frac{2^k}{\cos 2^k}\frac{a}{2^k} \quad \text{et donc} \quad \cos\frac{a}{2^k} = \frac{\sin(a/2^{k-1})}{2\sin(a/2^k)}.$$

Mais alors,

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(a/2^{k-1})}{2\sin(a/2^k)} = \frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=1}^{n}\sin(a/2^{k-1})}{\prod_{k=1}^{n}\sin(a/2^k)} = \frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\sin(a/2^k)}{\prod_{k=1}^{n}\sin(a/2^k)} = \frac{\sin a}{2^n\sin(a/2^n)}.$$
