



## Trigonométrie hyperbolique

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*\*\*IT

---

Domaine de définition et calcul des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto \sin(\arcsin x)$ ,
2.  $x \mapsto \arcsin(\sin x)$ ,
3.  $x \mapsto \cos(\arccos x)$ ,
4.  $x \mapsto \arccos(\cos x)$ ,
5.  $x \mapsto \tan(\arctan x)$ ,
6.  $x \mapsto \arctan(\tan x)$ .

[Correction ▼](#)

[005084]

### Exercice 2 \*\*\*IT

---

1. Calculer  $\arccos x + \arcsin x$  pour  $x$  élément de  $[-1, 1]$ .
2. Calculer  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$  pour  $x$  réel non nul.
3. Calculer  $\cos(\arctan a)$  et  $\sin(\arctan a)$  pour  $a$  réel donné.
4. Calculer, pour  $a$  et  $b$  réels tels que  $ab \neq 1$ ,  $\arctan a + \arctan b$  en fonction de  $\arctan \frac{a+b}{1-ab}$  (on étudiera d'abord  $\cos(\arctan a + \arctan b)$  et on distinguera les cas  $ab < 1$ ,  $ab > 1$  et  $a > 0$ ,  $ab > 1$  et  $a < 0$ ).

[Correction ▼](#)

[005085]

### Exercice 3 \*IT

---

Etablir pour ch, sh et th les formules d'addition, de duplication et de linéarisation.

[Correction ▼](#)

[005086]

### Exercice 4 \*\*\*I

---

Existence et calcul de  $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt$ .

[Correction ▼](#)

[005087]

### Exercice 5 \*\*

---

Simplifier les expressions suivantes :

1.  $f_1(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ .
2.  $f_2(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ .

3.  $f_3(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2} - \arctan \left( \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right).$

4.  $f_4(x) = \arctan \frac{1}{2x^2} - \arctan \frac{x}{x+1} + \arctan \frac{x-1}{x}.$

[Correction ▼](#)

[005088]

---

### Exercice 6 \*\*I

Calculer  $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}.$

[Correction ▼](#)

[005089]

---

### Exercice 7 \*\*\*I

Calculer  $u_n = \arctan \frac{2}{1^2} + \arctan \frac{2}{2^2} + \dots + \arctan \frac{2}{n^2}$  pour  $n$  entier naturel non nul donné puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$   
(Utiliser l'exercice 2 4))

[Correction ▼](#)

[005090]

---

### Exercice 8 \*

Etudier  $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch}x) - x.$

[Correction ▼](#)

[005091]

---

### Exercice 9 \*\* Mines de DOUAI 1984

On considère la fonction numérique  $f$  telle que :

$$f(x) = (x^2 - 1) \arctan \frac{1}{2x - 1},$$

et on appelle  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Quel est l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  ?
2. Exprimer, sur  $\mathcal{D} \setminus \{0\}$ , la dérivée de  $f$  sous la forme :  $f'(x) = 2xg(x).$
3. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$  et en déduire le tableau de variation de  $g.$
4. Dresser le tableau de variation de  $f.$

[Correction ▼](#)

[005092]

---

### Exercice 10 \*\*

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\operatorname{sh}(2+x) + \operatorname{sh}(2+2x) + \dots + \operatorname{sh}(2+100x) = 0.$

[Correction ▼](#)

[005093]

---

### Exercice 11 \*\*I

1. Montrer que pour tout réel  $x$  non nul, on a :  $\operatorname{th}x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}x}.$
2. En déduire la valeur de  $u_n = 2^0 \operatorname{th}(2^0x) + 2^1 \operatorname{th}(2^1x) + \dots + 2^n \operatorname{th}(2^n x)$  pour  $n$  entier naturel non nul et  $x$  réel non nul donnés puis calculer la limite de  $(u_n).$

[Correction ▼](#)

[005094]

---

### Exercice 12 \*\*

Simplifier les expressions suivantes

1.  $\sin(2 \arcsin x),$

2.  $\cos(2 \arccos x)$ ,

3.  $\sin^2\left(\frac{\arccos x}{2}\right)$ ,

4.  $\ln(\sqrt{x^2+1}+x) + \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ ,

5.  $\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ ,

6.  $\operatorname{argch}(2x^2-1)$ ,

7.  $\operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\right)$ ,

8.  $\frac{\operatorname{ch}(\ln x) + \operatorname{sh}(\ln x)}{x}$ .

[Correction ▼](#)

[005095]

---

### Exercice 13 \*\*

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $\operatorname{ch}x = 2$ ,

2.  $\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$ ,

3.  $2 \arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ .

[Correction ▼](#)

[005096]

---

### Correction de l'exercice 1 ▲

$\arcsin x$  existe si et seulement si  $x$  est dans  $[-1, 1]$ . Donc,  $\sin(\arcsin x)$  existe si et seulement si  $x$  est dans  $[-1, 1]$  et pour  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,  $\sin(\arcsin x) = x$ .

$\arcsin(\sin x)$  existe pour tout réel  $x$  mais ne vaut  $x$  que si  $x$  est dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . • S'il existe un entier relatif  $k$  tel que  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , alors  $-\frac{\pi}{2} \leq x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}$  et donc

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x - 2k\pi)) = x - 2k\pi.$$

De plus, on a  $k \leq \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4} < k + \frac{1}{2}$  et donc  $k = E\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4}\right)$ . • S'il existe un entier relatif  $k$  tel que  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ , alors  $-\frac{\pi}{2} < \pi - x + 2k\pi \leq \frac{\pi}{2}$  et donc

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x + 2k\pi)) = \pi - x + 2k\pi.$$

De plus,  $k \leq \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4} < k + \frac{1}{2}$  et donc  $k = E\left(\frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4}\right)$ .

$\arccos x$  existe si et seulement si  $x$  est dans  $[-1, 1]$ . Donc,  $\cos(\arccos x)$  existe si et seulement si  $x$  est dans  $[-1, 1]$  et pour  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,  $\cos(\arccos x) = x$ .

$\arccos(\cos x)$  existe pour tout réel  $x$  mais ne vaut  $x$  que si  $x$  est dans  $[0, \pi]$ . • S'il existe un entier relatif  $k$  tel que  $2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi$ , alors  $\arccos(\cos x) = x - 2k\pi$  avec  $k = E\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ . • S'il existe un entier relatif  $k$  tel que  $-\pi + 2k\pi \leq x < 2k\pi$  alors  $\arccos(\cos x) = \arccos(\cos(2k\pi - x)) = 2k\pi - x$  avec  $k = E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $\tan(\arctan x) = x$ .

$\arctan(\tan x)$  existe si et seulement si  $x$  n'est pas dans  $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$  et pour ces  $x$ , il existe un entier relatif  $k$  tel que  $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ . Dans ce cas,  $\arctan(\tan x) = \arctan(\tan(x - k\pi)) = x - k\pi$  avec  $k = E\left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

1. **1ère solution.** Posons  $f(x) = \arccos x + \arcsin x$  pour  $x$  dans  $[-1, 1]$ .  $f$  est définie et continue sur  $[-1, 1]$ , dérivable sur  $] -1, 1[$ . De plus, pour  $x$  dans  $] -1, 1[$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Donc  $f$  est constante sur  $[-1, 1]$  et pour  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,  $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$ .

$$\forall x \in [-1, 1], \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

**2ème solution.** Il existe un unique réel  $\theta$  dans  $[0, \pi]$  tel que  $x = \cos \theta$ , à savoir  $\theta = \arccos x$ . Mais alors,

$$\arccos x + \arcsin x = \theta + \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

(car  $\frac{\pi}{2} - \theta$  est dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ).

2. **1ère solution.** Pour  $x$  réel non nul, posons  $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ .  $f$  est impaire.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et pour tout réel  $x$  non nul,  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$ .  $f$  est donc constante sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $] 0, +\infty[$  (mais pas nécessairement sur  $\mathbb{R}^*$ ). Donc, pour  $x > 0$ ,  $f(x) = f(1) = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$ , et puisque  $f$  est impaire, pour  $x < 0$ ,  $f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}$ . Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x).$$

**2ème solution** Pour  $x$  réel strictement positif donné, il existe un unique réel  $\theta$  dans  $]0, \frac{\pi}{2}[$  tel que  $x = \tan \theta$  à savoir  $\theta = \arctan x$ . Mais alors,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \theta + \arctan \left( \frac{1}{\tan \theta} \right) = \theta + \arctan \left( \tan \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

(car  $\theta$  et  $\frac{\pi}{2} - \theta$  sont éléments de  $]0, \frac{\pi}{2}[$ ).

3.  $\cos^2(\arctan a) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan a)} = \frac{1}{1+a^2}$ . De plus,  $\arctan a$  est dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et donc  $\cos(\arctan a) > 0$ . On en déduit que pour tout réel  $a$ ,  $\cos(\arctan a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$  puis

$$\sin(\arctan a) = \cos(\arctan a) \tan(\arctan a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \cos(\arctan a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \text{ et } \sin(\arctan a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

4. D'après 3),

$$\cos(\arctan a + \arctan b) = \cos(\arctan a) \cos(\arctan b) - \sin(\arctan a) \sin(\arctan b) = \frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}},$$

ce qui montre déjà, puisque  $ab \neq 1$ , que  $\cos(\arctan a + \arctan b) \neq 0$  et donc que  $\tan(\arctan a + \arctan b)$  existe. On a immédiatement,

$$\tan(\arctan a + \arctan b) = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Maintenant,  $\arctan a + \arctan b$  est dans  $]-\pi, -\frac{\pi}{2}[ \cup ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \cup ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ .

**1er cas.** Si  $ab < 1$  alors  $\cos(\arctan a + \arctan b) > 0$  et donc  $\arctan a + \arctan b$  est dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Dans ce cas,  $\arctan a + \arctan b = \arctan \left( \frac{a+b}{1-ab} \right)$ .

**2ème cas.** Si  $ab > 1$  alors  $\cos(\arctan a + \arctan b) < 0$  et donc  $\arctan a + \arctan b$  est dans  $]-\pi, -\frac{\pi}{2}[ \cup ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ . Si de plus  $a > 0$ ,  $\arctan a + \arctan b > -\frac{\pi}{2}$  et donc  $\arctan a + \arctan b$  est dans  $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ . Dans ce cas,  $\arctan a + \arctan b - \pi$  est dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et a même tangente que  $\arctan \frac{a+b}{1-ab}$ . Donc,  $\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab} + \pi$ . Si  $a < 0$ , on trouve de même  $\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab} - \pi$ .

En résumé,

$$\arctan a + \arctan b = \begin{cases} \arctan \frac{a+b}{1-ab} & \text{si } ab < 1 \\ \arctan \frac{a+b}{1-ab} + \pi & \text{si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ \arctan \frac{a+b}{1-ab} - \pi & \text{si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}.$$

### Correction de l'exercice 3 ▲

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b & \text{et} & \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \\ \operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b & \text{et} & \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \\ \operatorname{th}(a+b) &= \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b} & \text{et} & \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}. \end{aligned}$$

Deux démonstrations :

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{4}((e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})) = \frac{1}{2}(e^{a+b} + e^{-a-b}) = \operatorname{ch}(a+b).$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a+b)} = \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

après division du numérateur et du dénominateur par le nombre non nul  $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$ . En appliquant à  $a = b = x$ , on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 2\operatorname{sh}^2 x + 1, \operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \text{ et } \operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.$$

En additionnant entre elles les formules d'addition, on obtient les formules de linéarisation :

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)), \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)) \text{ et } \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)),$$

et en particulier

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2} \text{ et } \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2}.$$

#### Correction de l'exercice 4 ▲

Pour  $x$  réel, on pose  $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt$ .

La fonction  $t \mapsto \arcsin \sqrt{t}$  est continue sur  $[0, 1]$ . Donc, la fonction  $y \mapsto \int_0^y \arcsin \sqrt{t} dt$  est définie et dérivable sur  $[0, 1]$ . De plus,  $x \mapsto \sin^2 x$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $[0, 1]$ . Finalement, la fonction  $x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De même, la fonction  $t \mapsto \arccos \sqrt{t}$  est continue sur  $[0, 1]$ . Donc, la fonction  $y \mapsto \int_0^y \arccos \sqrt{t} dt$  est définie et dérivable sur  $[0, 1]$ . De plus, la fonction  $x \mapsto \cos^2 x$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ . Finalement, la fonction  $x \mapsto \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Donc,  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sin x \cos x \arcsin(\sqrt{\sin^2 x}) - 2 \sin x \cos x \arccos(\sqrt{\cos^2 x}) \\ &= 2 \sin x \cos x (\arcsin(|\sin x|) - \arccos(|\cos x|)). \end{aligned}$$

On note alors que  $f$  est  $\pi$ -périodique et paire. Pour  $x$  élément de  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $f'(x) = 2 \sin x \cos x (x - x) = 0$ .  $f$  est donc constante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et pour  $x$  élément de  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $f(x) = f(\frac{\pi}{4}) = \int_0^{1/2} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{1/2} \arccos \sqrt{t} dt = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2} dt = \frac{\pi}{4}$ . Mais alors, par parité et  $\pi$ -périodicité,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

#### Correction de l'exercice 5 ▲

1. **1ère solution.** Pour tout réel  $x$ ,  $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|$  et donc  $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1$ . Ainsi  $f_1$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , impaire, et pour tout réel  $x$ ,

$$f_1'(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{2} x \frac{2x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x).$$

Donc il existe une constante réelle  $C$  telle que pour tout réel  $x$ ,  $f_1(x) = \arctan x + C$ .  $x = 0$  fournit  $C = 0$  et donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan x.$$

**2ème solution.** Pour  $x$  réel donné, posons  $\theta = \arctan x$ .  $\theta$  est dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $x = \tan \theta$ .

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{\tan \theta}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} = \sqrt{\cos^2 \theta} \tan \theta = \cos \theta \tan \theta \quad (\text{car } \cos \theta > 0) \\ &= \sin \theta \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \arcsin(\sin \theta) = \theta \quad (\text{car } \theta \text{ est dans } ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) \\ &= \arctan x. \end{aligned}$$

2. **1ère solution.** Pour tout réel  $x$ ,  $-1 < -1 + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq -1 + 2 = 1$  (avec égalité si et seulement si  $x = 0$ ).  $f_2$  est donc définie et continue sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . Pour tout réel  $x$  non nul,

$$f_2'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \frac{2\varepsilon}{1+x^2}$$

où  $\varepsilon$  est le signe de  $x$ . Donc il existe une constante réelle  $C$  telle que pour tout réel positif  $x$ ,  $f_2(x) = 2 \arctan x + C$  (y compris  $x = 0$  puisque  $f$  est continue en 0).

$x = 0$  fournit  $C = 0$  et donc, pour tout réel positif  $x$ ,  $f_2(x) = 2 \arctan x$ . Par parité,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2 \arctan |x|.$$

**2ème solution.** Soit  $x \in \mathbb{R}$  puis  $\theta = \arctan x$ .  $\theta$  est dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $x = \tan \theta$ .

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} = \cos^2 \theta (1-\tan^2 \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta).$$

Donc

$$f_2(x) = \arccos(\cos(2\theta)) = \begin{cases} 2\theta & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[ \\ -2\theta & \text{si } \theta \in ]-\frac{\pi}{2}, 0] \end{cases} = \begin{cases} 2 \arctan x & \text{si } x \geq 0 \\ -2 \arctan x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} = 2 \arctan |x|.$$

3. La fonction  $x \mapsto \arcsin \sqrt{1-x^2}$  est définie et continue sur  $[-1, 1]$ , dérivable sur  $[-1, 1] \setminus \{0\}$  car pour  $x$  élément de  $[-1, 1]$ ,  $1-x^2$  est élément de  $[0, 1]$  et vaut 1 si et seulement si  $x$  vaut 0.  $\frac{1-x}{1+x}$  est défini et positif si et seulement si  $x$  est dans  $]-1, 1]$ , et nul si et seulement si  $x = 1$ .  $f_3$  est donc définie et continue sur  $]-1, 1]$ , dérivable sur  $]-1, 0[ \cup ]0, 1[$ . Pour  $x$  dans  $]-1, 0[ \cup ]0, 1[$ , on note  $\varepsilon$  le signe de  $x$  et on a :

$$f_3'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} - \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si  $x$  est dans  $]0, 1[$ ,  $f_3'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (-\frac{1}{2} \arcsin)'(x)$ . Donc, il existe un réel  $C$  tel que, pour tout  $x$  de  $]0, 1[$  (par continuité)  $f_3(x) = -\frac{1}{2} \arcsin x + C$ .  $x = 1$  fournit  $C = \frac{\pi}{4}$ . Donc,

$$\forall x \in [0, 1], f_3(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin x = \frac{1}{2} \arccos x.$$

Si  $x$  est dans  $] -1, 0[$ ,  $f_3'(x) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\frac{3}{2} \arcsin)'(x)$ . Donc il existe un réel  $C'$  tel que, pour tout  $x$  de  $] -1, 0[$  (par continuité)  $f_3(x) = \frac{3}{2} \arcsin x + C'$ .  $x = 0$  fournit  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = C'$ . Donc,

$$\forall x \in ] -1, 0], f_3(x) = \frac{3}{2} \arcsin x + \frac{\pi}{4}.$$

4.  $f_4$  est dérivable sur  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$  et pour  $x$  élément de  $\mathcal{D}$ , on a :

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= -\frac{1}{x^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{4x^4}} - \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{x - (x-1)}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{(x-1)^2}{x^2}} \\ &= -\frac{4x}{4x^4 + 1} - \frac{1}{2x^2 + 1 + 2x} + \frac{1}{2x^2 + 1 - 2x} = -\frac{4x}{4x^4 + 1} + \frac{4x}{(2x^2 + 1)^2 - 4x^2} = 0. \end{aligned}$$

$f_4$  est donc constante sur chacun des trois intervalles  $] -\infty, -1[$ ,  $] -1, 0[$  et  $] 0, +\infty[$ . Pour  $x > 0$ ,  $f(x) = f(1) = 0$ . Pour  $-1 < x < 0$ ,  $f(x) = \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} f(t) = \arctan \frac{1}{2} - (-\frac{\pi}{2}) + \arctan 2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ . Pour  $x < -1$ ,  $f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$  et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}, f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ] -\infty, -1[ \cup ] 0, +\infty[ \\ \pi & \text{si } x \in ] -1, 0[ \end{cases}.$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

$0 \leq \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} < \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$  et

$$\tan \left( \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} \right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} = \frac{7}{9}.$$

Comme  $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ , on a donc  $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{7}{9}$ . De même,  $\arctan \frac{7}{9} + \arctan \frac{1}{8} \in [0, \frac{\pi}{2}[$  et

$$\tan \left( \arctan \frac{7}{9} + \arctan \frac{1}{8} \right) = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \times \frac{1}{8}} = \frac{65}{65} = 1,$$

et donc  $\arctan \frac{7}{9} + \arctan \frac{1}{8} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ . Finalement,

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

### Correction de l'exercice 7 ▲

(On va retrouver le résultat de l'exercice 2 dans un cas particulier)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs. Alors,  $\arctan a \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\arctan b \in [0, \frac{\pi}{2}[$  et donc,  $\arctan a - \arctan b \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . De plus,

$$\tan(\arctan a - \arctan b) = \frac{\tan(\arctan a) - \tan(\arctan b)}{1 + \tan(\arctan a) \tan(\arctan b)} = \frac{a - b}{1 + ab},$$

et donc, puisque  $\arctan a - \arctan b \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,

$$\forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).$$

Soit alors  $k$  un entier naturel non nul.  $\arctan \frac{2}{k^2} = \arctan \frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan(k-1)$  (puisque  $k-1$  et  $k+1$  sont positifs). Par suite, si  $n$  est un entier naturel non nul donné,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2} = \sum_{k=1}^n (\arctan(k+1) - \arctan(k-1)) = \sum_{k=2}^{n+1} \arctan k - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan k \\ &= \arctan(n+1) + \arctan n - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

La limite de  $u_n$  vaut donc  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3\pi}{4}.$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

• Pour tout réel  $x$ ,  $\operatorname{ch} x > 0$ . Donc  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = \operatorname{sh} x \frac{1}{\operatorname{ch} x} - 1 = \operatorname{th} x - 1 < 0.$$

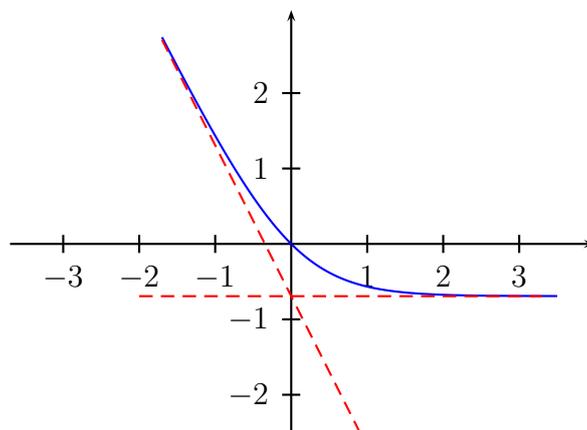
$f$  est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ . • Etude en  $-\infty$ .  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$  et donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ . Cherchons une éventuelle droite asymptote.

$$f(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} - x = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 - x = \ln(e^{-x}) - x - \ln 2 + \ln(1 + e^{2x}) = -2x - \ln 2 + \ln(1 + e^{2x}).$$

Donc,  $f(x) - (-2x - \ln 2) = \ln(1 + e^{2x})$ . Or, d'une part  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^{2x}) = 0$  et donc la droite  $(D)$  d'équation  $y = -2x - \ln 2$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $-\infty$  et d'autre part, pour tout réel  $x$ ,  $\ln(1 + e^{2x}) > 0$  et la courbe représentative de  $f$  est strictement au dessus de  $(D)$  sur  $\mathbb{R}$ . • Etude en  $+\infty$ .

$$f(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} - x = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 - x = \ln(e^x) - x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}) = -\ln 2 + \ln(1 + e^{-2x})$$

et  $f$  tend vers  $-\ln 2$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . • Graphe.



### Correction de l'exercice 9 ▲

1.  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ .

2. Pour  $x$  élément de  $\mathcal{D}$ ,

$$f'(x) = 2x \arctan \frac{1}{2x-1} + (x^2-1) \frac{-2}{(2x-1)^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{(2x-1)^2}} = 2x \arctan \frac{1}{2x-1} - \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}.$$

De plus, pour  $x$  non nul :  $f'(x) = 2xg(x)$  où  $g(x) = \arctan \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$ .

3. Pour  $x$  élément de  $\mathcal{D} \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{2x^2-2x+1} - \frac{1}{2} \frac{2x(2x^3-2x^2+x) - (x^2-1)(6x^2-4x+1)}{x^2(2x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2(2x^2-2x+1) + 2x^4 - 7x^2 + 4x - 1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2} = -\frac{2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1}{2x^2(x^2-2x+1)^2}. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 = 2x^2(x-1)^2 + 7x^2 - 4x + 1 = 2x^2(x-1)^2 + 7\left(x - \frac{2}{7}\right)^2 + \frac{3}{7} > 0.$$

Donc,  $g$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, 0[$ , sur  $]0, \frac{1}{2}[$  et sur  $] \frac{1}{2}, +\infty[$ . En  $+\infty$ ,  $g(x)$  tend vers 0. Donc  $g$  est strictement positive sur  $] \frac{1}{2}, +\infty[$ . Quand  $x$  tend vers  $\frac{1}{2}$  par valeurs inférieures,  $g$  tend vers  $-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} < 0$  et quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures,  $g(x)$  tend vers  $+\infty$ . Donc  $g$  s'annule une et une seule fois sur l'intervalle  $]0, \frac{1}{2}[$  en un certain réel  $x_0$  de  $]0, \frac{1}{2}[$ .  $g$  est de plus strictement négative sur  $]x_0, \frac{1}{2}[$  et strictement positive sur  $]0, x_0[$ . Quand  $x$  tend vers  $-\infty$ ,  $g(x)$  tend vers 0. Donc  $g$  est strictement négative sur  $] -\infty, 0[$ . Enfin, puisque  $f'(x) = 2xg(x)$  pour  $x \neq 0$ , on a les résultats suivants : sur  $] -\infty, 0[$ ,  $f' > 0$ , sur  $]0, x_0[$ ,  $f' > 0$ , sur  $]x_0, \frac{1}{2}[$ ,  $f' < 0$ , sur  $] \frac{1}{2}, +\infty[$ ,  $f' > 0$ . Comme  $f'(0) = 1 > 0$ , on a donc : sur  $] -\infty, x_0[$ ,  $f' > 0$ , sur  $]x_0, \frac{1}{2}[$ ,  $f' < 0$  et sur  $] \frac{1}{2}, +\infty[$ ,  $f' > 0$ .  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty, x_0[$  et sur  $] \frac{1}{2}, +\infty[$  et est strictement décroissante sur  $]x_0, \frac{1}{2}[$ .

### Correction de l'exercice 10 ▲

Soit  $x$  un réel.

$$S = \sum_{k=1}^{100} \operatorname{sh}(2+kx) = \frac{1}{2} \left( e^2 \sum_{k=1}^{100} e^{kx} - e^{-2} \sum_{k=1}^{100} e^{-kx} \right).$$

Si  $x = 0$  alors directement  $S = 100 \operatorname{sh} 2 \neq 0$ . Si  $x \neq 0$  alors  $e^x \neq 1$  et  $e^{-x} \neq 1$ . Dans ce cas,

$$S = \frac{1}{2} \left( e^2 e^x \frac{1-e^{100x}}{1-e^x} - e^{-2} e^{-x} \frac{1-e^{-100x}}{1-e^{-x}} \right) = \frac{1}{2} \left( e^2 e^x \frac{1-e^{100x}}{1-e^x} + e^{-2} \frac{1-e^{-100x}}{1-e^x} \right).$$

après multiplication du numérateur et du dénominateur de la deuxième fraction par  $e^x$ . Pour  $x \neq 0$ , on a donc :

$$\begin{aligned} S = 0 &\Leftrightarrow e^{x+2}(1-e^{100x}) + e^{-2}(1-e^{-100x}) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2}(1-e^{100x}) + e^{-2-100x}(e^{100x}-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-e^{100x})(e^{x+2}-e^{-100x-2}) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2} = e^{-100x-2} \text{ (car } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x+2 = -100x-2 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{101}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{4}{101} \right\}.$$

### Correction de l'exercice 11 ▲

On a vu au 3 que pour tout réel  $x$ ,  $\operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}$  ce qui s'écrit pour  $x$  non nul :  $\frac{1+\operatorname{th}^2x}{\operatorname{th}x} = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)}$  ou encore  $\operatorname{th}x + \frac{1}{\operatorname{th}x} = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)}$  ou finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $x$  un réel non nul. D'après ce qui précède,

$$u_n = \sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k x) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1} x)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} = \frac{2^{n+1}}{\operatorname{th}(2^{n+1} x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

Ensuite, pour  $x > 0$ ,  $\operatorname{th}(2^{n+1} x)$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini. Donc  $u_n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si  $x > 0$  et vers  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si  $x < 0$ .

### Correction de l'exercice 12 ▲

1. Pour tout réel  $x$  de  $[-1, 1]$ ,  $\sin(2 \arcsin x) = 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ .
2. Pour tout réel  $x$  de  $[-1, 1]$ ,  $\cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$ .
3. Pour tout réel  $x$  de  $[-1, 1]$ ,  $\sin^2(\frac{1}{2} \arccos x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\arccos x)) = \frac{1-x}{2}$ .
4. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = \operatorname{Max}\{x, -x\}.$$

Donc,  $\sqrt{x^2+1} + x > 0$  et  $\sqrt{x^2+1} - x > 0$ . L'expression proposée existe pour tout réel  $x$ . De plus,

$$\ln(\sqrt{x^2+1} + x) + \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = \ln\left((\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)\right) = \ln(x^2 + 1 - x^2) = \ln 1 = 0.$$

5. L'expression proposée est définie sur  $\mathbb{R}^*$  et impaire. Soit alors  $x > 0$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) &= \ln\left(\frac{x^2-1}{2x} + \sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(2x)^2} + 1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1 + \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2})\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1 + \sqrt{(x^2+1)^2})\right) = \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1 + x^2+1)\right) = \ln x \end{aligned}$$

Par imparité, si  $x < 0$ ,  $\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = -\ln(-x)$ . En résumé, en notant  $\varepsilon$  le signe de  $x$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = \varepsilon \ln|x|.$$

6. L'expression proposée existe si et seulement si  $2x^2 - 1 \in [1, +\infty[$  ou encore  $x^2 \in [1, +\infty[$  ou enfin  $x \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ . Cette expression est paire. Soit donc  $x \in [1, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{argch}(2x^2 - 1) &= \ln(2x^2 - 1 + \sqrt{(2x^2 - 1)^2 - 1}) = \ln(2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2 - 1}) = \ln\left((x + \sqrt{x^2 - 1})^2\right) \\ &= 2 \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 2 \operatorname{argch} x \end{aligned}$$

Par parité, on en déduit que

$$\forall x \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \operatorname{argch}(2x^2 - 1) = 2 \operatorname{argch}|x|.$$

7. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{argth} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} \text{ existe} &\Leftrightarrow \operatorname{ch}x+1 \neq 0 \text{ et } \frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \geq 0 \text{ et } \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} \in ]-1, 1[ \\ &\Leftrightarrow \frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \in [0, 1[ \end{aligned}$$

Mais, d'une part,  $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \geq 0$  et d'autre part,  $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} = \frac{\operatorname{ch}x+1-2}{\operatorname{ch}x+1} = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}x+1} < 1$ . L'expression proposée existe donc pour tout réel  $x$  et est paire. Ensuite, pour  $x$  réel positif, on a

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}}{1 - \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}} &= \frac{\sqrt{\operatorname{ch}x+1} + \sqrt{\operatorname{ch}x-1}}{\sqrt{\operatorname{ch}x+1} - \sqrt{\operatorname{ch}x-1}} = \frac{(\sqrt{\operatorname{ch}x+1} + \sqrt{\operatorname{ch}x-1})^2}{(\operatorname{ch}x+1) - (\operatorname{ch}x-1)} = \frac{2\operatorname{ch}x + 2\sqrt{\operatorname{ch}^2x - 1}}{2} \\ &= \operatorname{ch}x + \sqrt{\operatorname{sh}^2x} = \operatorname{ch}x + |\operatorname{sh}x| = \operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x = e^x \end{aligned}$$

Par suite,  $x$  étant toujours positif,

$$\operatorname{argth} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} = \frac{1}{2} \ln(e^x) = \frac{x}{2}.$$

Par parité, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argth} \left( \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} \right) = \frac{|x|}{2}.$$

(Remarque. Pour 5), 6) et 7), on peut aussi dériver chaque expression)

8. Pour  $x > 0$ ,

$$\frac{\operatorname{ch}(\ln x) + \operatorname{sh}(\ln x)}{x} = \frac{1}{2x} \left( x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} \right) = 1.$$

### Correction de l'exercice 13 ▲

- $\operatorname{ch}x = 2 \Leftrightarrow x = \pm \operatorname{argch}2 = \pm \ln(2 + \sqrt{2^2 - 1}) = \pm \ln(2 + \sqrt{3})$ . Les solutions sont  $\ln(2 + \sqrt{3})$  et  $-\ln(2 + \sqrt{3})$  (ou encore  $\ln(2 - \sqrt{3})$  car  $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ ).
- Une solution est nécessairement dans  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Soit donc  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsin}(2x) &= \operatorname{arcsin}x + \operatorname{arcsin}(x\sqrt{2}) \Rightarrow \sin(\operatorname{arcsin}(2x)) = \sin(\operatorname{arcsin}x + \operatorname{arcsin}(x\sqrt{2})) \\ &\Leftrightarrow 2x = x\sqrt{1 - (x\sqrt{2})^2} + x\sqrt{2}\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{1 - 2x^2} + \sqrt{2 - 2x^2} = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 - 2x^2 + 2 - 2x^2 + 2\sqrt{(1 - 2x^2)(2 - 2x^2)} = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{(1 - 2x^2)(2 - 2x^2)} = 1 + 4x^2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4(4x^4 - 6x^2 + 2) = (4x^2 + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 32x^2 = 7 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{7}{32}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{7}{32}} \end{aligned}$$

Réciproquement, pour chacun des ces trois nombres  $x$ , la seule implication écrite est une équivalence si  $x$  est dans  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  (ce qui est le cas puisque  $(\pm\sqrt{\frac{7}{32}})^2 = \frac{14}{64} \leq \frac{16}{64} = (\frac{1}{2})^2$ ) et  $\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$  est dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Mais,

$$0 \leq \arcsin \sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) = \arcsin \sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin \sqrt{\frac{7}{16}} \leq 2 \arcsin \sqrt{\frac{8}{16}} = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

et donc  $\arcsin \sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . De même, par parité,  $\arcsin(-\sqrt{\frac{7}{32}}) + \arcsin(-\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$  ce qui achève la résolution.

$$\mathcal{S} = \left\{ 0, \frac{\sqrt{14}}{8}, -\frac{\sqrt{14}}{8} \right\}.$$

3. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $\arcsin x$  existe si et seulement si  $x \in [-1, 1]$ . Ensuite,

$$\begin{aligned} \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1, 1] \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \in [0, 1] \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 4x^4 - 4x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } (2x^2 - 1)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

Pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $\sin(2 \arcsin(x)) = 2 \sin(\arcsin(x)) \cos(\arcsin(x)) = 2x\sqrt{1-x^2} = \sin(\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}))$ ,  
et de plus,  
 $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Par suite,

$$\begin{aligned} x \text{ solution} &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 2 \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$