Trigonométrie

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 *IT

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0,2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0$,
2. $\sin x = 1$,
3. $\sin x = -1$,
4. $\cos x = 1$,
5. $\cos x = -1$,
6. $\cos x = 0$,
7. $\tan x = 0$,
8. $\tan x = 1$.

Correction ▼ [005063]

Exercice 2 *IT

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0,2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$,
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
3. $\tan x = -1$,
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Correction ▼ [005064]

Exercice 3 **IT

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

1. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, $I = [0,2\pi]$,
2. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I = [0,4\pi]$,
3. $\tan(5x) = 1$, $I = [0,\pi]$,

4. $\cos(2x) = \cos^2 x$, $I = [0, 2\pi]$,

5. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$, $I = [0, 2\pi]$,

6. $\cos(nx) = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$,

7. $|\cos(nx)| = 1$,

8. $\sin(nx) = 0$,

9. $|\sin(nx)| = 1$,

10. $\sin x = \tan x$, $I = [0, 2\pi]$,

11. $\sin(2x) + \sin x = 0$, $I = [0, 2\pi]$,

12. $12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2$, $I = [-\pi, \pi]$.

Correction ▼ [005065]

Exercice 4 **IT

Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1. $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$, $I = [-\pi, \pi]$,

2. $\sin x \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I = \mathbb{R}$,

3. $\cos x > \cos\frac{x}{2}$, $I = [0, 2\pi]$,

4. $\cos^2 x \geqslant \cos(2x)$, $I = [-\pi, \pi]$,

5. $\cos^2 x \leqslant \frac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$,

6. $\cos\frac{x}{3} \leqslant \sin\frac{x}{3}$, $I = [0, 2\pi]$.

Correction ▼ [005066]

Exercice 5 *I

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Correction ▼ [005067]

Exercice 6 *I

Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Correction ▼ [005068]

Exercice 7 ***

Montrer que $\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n$ (la somme comporte 2^n termes).

Correction ▼ [005069]

Exercice 8 ***I

1. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$ pour a élément donné de $]0, \pi[$ (penser à $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$).

2. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)$.

Correction ▼ [005070]

Exercice 9 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{4\cos^2 x+1}+16.2^{4\sin^2 x-3}=20$.

Correction ▼ [005071]

Exercice 10 ***

Soit a un réel distinct de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Calculer $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan\theta$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}.$$
On trouvera deux méthodes, l'une algébrique et l'autre utilisant la formule de trigonométrie établie en 1).

Correction ▼ [005072]

Exercice 11 ****

On veut calculer $S=\tan 9°-\tan 27°-\tan 63°+\tan 81°$.

1. Calculer $\tan(5x)$ en fonction de $\tan x$.
2. En déduire un polynôme de degré 4 dont les racines sont $\tan 9°$, $-\tan 27°$, $-\tan 63°$ et $\tan 81°$ puis la valeur de S.

Correction ▼ [005073]

Exercice 12 ***

Combien l'équation
$$\tan x+\tan(2x)+\tan(3x)+\tan(4x)=0,$$
possède-t-elle de solutions dans $[0,\pi]$?

Correction ▼ [005074]

Exercice 13 **I

On veut calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$. Pour cela, on pose $a=2\cos\frac{2\pi}{5}$, $b=2\cos\frac{4\pi}{5}$ et $z=e^{2i\pi/5}$.

1. Vérifier que $a=z+z^4$ et $b=z^2+z^3$.
2. Vérifier que $1+z+z^2+z^3+z^4=0$.
3. En déduire un polynôme de degré 2 dont les racines sont a et b puis les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.

Correction ▼ [005075]

Exercice 14 **I

Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $x\mapsto\cos^2 x$,
2. $x\mapsto\cos^4 x$,

3. $x \mapsto \sin^4 x$,
4. $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$,
5. $x \mapsto \sin^6 x$,
6. $x \mapsto \cos x \sin^6 x$,
7. $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$,
8. $x \mapsto \cos^3 x$.

Correction ▼ [005076]

Exercice 15 **

Calculer $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^6 x \, dx$ et $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^7 x \, dx$.

Correction ▼ [005077]

Exercice 16 **

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$,
2. $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$,
3. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2}{\cos(2x)}$,
4. $\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan(2x)}$.

Correction ▼ [005078]

Exercice 17 ***

Soit k un réel distinct de -1 et de 1.

1. Etudier les variations de $f_k \ : \ x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{1-2k\cos x+k^2}}$.
2. Calculer $\int_0^{\pi} f_k(x) \, dx$.

Correction ▼ [005079]

Exercice 18 ***I

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).
2. $\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).

Correction ▼ [005080]

Exercice 19 ***

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{array}\right.$ où a, b et c sont trois réels.

Correction ▼ [005081]

Exercice 20 **

Montrer que $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$.

Correction ▼ [005082]

Exercice 21 ***

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x)=\sin(2x)$.
2. En déduire les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$ pour x élément de $\left\{\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{10}\right\}$.

Correction ▼ [005083]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
2. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
3. $\sin x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.
4. $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, 2\pi\}$.
5. $\cos x = -1 \Leftrightarrow x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{\pi\}$.
6. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
7. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
8. $\tan x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$.
3. $\tan x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$.
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. $\sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$.
2. $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,4\pi]} = \left\{\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$.
3. $\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}\right\}$.
4. $\cos(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
5. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.
6. $\cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
7. $|\cos(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
8. $\sin(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
9. $|\sin(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
10. $\sin x = \tan x \Leftrightarrow \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x \frac{\cos x - 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.

11.

$$\sin(2x)+\sin x=0 \Leftrightarrow \sin(2x)=\sin(x+\pi) \Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z}/\ 2x=x+\pi+2k\pi) \text{ ou } (\exists k\in\mathbb{Z}/\ 2x=-x+2k\pi)$$
$$\Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\pi+2k\pi) \text{ ou } (\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{2k\pi}{3})$$

De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\{0,\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},2\pi\}$.

12.

$$12\cos^2 x-8\sin^2 x=2 \Leftrightarrow 6\cos^2 x-4(1-\cos^2 x)=1 \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \cos=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x\in\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Pour $x\in[-\pi,\pi]$, $\cos x\leqslant\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$.
2. Pour $x\in\mathbb{R}$, $\sin x\geqslant-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right]$.
3. Pour $x\in[0,2\pi]$,

$$\cos x>\cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}-1>0 \Leftrightarrow (2\cos\frac{x}{2}+1)(\cos\frac{x}{2}-1)>0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}+1<0 \text{ et } \cos\frac{x}{2}\neq 1$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}<-\frac{1}{2} \text{ et } \frac{x}{2}\notin 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x}{2}\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right[\text{ et } x\notin 4\pi\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{4\pi}{3}+4k\pi,\frac{8\pi}{3}+4k\pi\right[\text{ et } x\notin 4\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x\in\left]\frac{4\pi}{3},2\pi\right]$$

4. Pour $x\in[-\pi,\pi]$, $\cos^2 x\geqslant\cos(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1+\cos(2x))\geqslant\cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x)\leqslant 1 \Leftrightarrow x\in[-\pi,\pi]$.
5. Pour $x\in[0,2\pi]$, $\cos^2 x\leqslant\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$.
6. Pour $x\in[0,2\pi]$,

$$\cos\frac{x}{3}\leqslant\sin\frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{3}\geqslant 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ 2k\pi\leqslant\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\leqslant\pi+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ \frac{3\pi}{4}+6k\pi\leqslant x\leqslant 3\pi+\frac{3\pi}{4}+6k\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2\pi$$

Correction de l'exercice 5 ▲

$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(1+\cos(2\times\frac{\pi}{8})\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$, et puisque $\cos\frac{\pi}{8}>0$,

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.}$$

De même, puisque $\sin\frac{\pi}{8}>0$, $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos(2\times\frac{\pi}{8})\right)}$ et

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

De même,

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\text{ et }\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Pour n naturel non nul, on pose $S_n=\sum e^{i(\pm a_1\pm\ldots\pm a_n)}$. • $S_1=e^{ia_1}+e^{-ia_1}=2\cos a_1$ • Soit $n\geqslant 1$. Supposons que $S_n=2^n\cos a_1\ldots\cos a_n$ alors

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=\sum e^{i(\pm a_1\pm\ldots\pm a_{n+1})}=e^{ia_{n+1}}\sum e^{i(\pm a_1\pm\ldots\pm a_n)}+e^{-ia_{n+1}}\sum e^{i(\pm a_1\pm\ldots\pm a_n)}\\&=2\cos(a_{n+1})S_n=2^{n+1}\cos a_1\ldots\cos a_{n+1}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que : $\forall n\geqslant 1,\ S_n=2^n\cos a_1\ldots\cos a_n$. Ensuite, pour $n\geqslant 1$, $\sum\cos(\pm a_1\pm\ldots\pm a_n)=\mathrm{Re}(S_n)=2^n\cos a_1\ldots\cos a_n$ (et on obtient aussi $\sum\sin(\pm a_1\pm\ldots\pm a_n)=\mathrm{Im}(S_n)=0$).

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum\cos(\pm a_1\pm\ldots\pm a_n)=2^n\cos a_1\ldots\cos a_n.}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque a est dans $]0,\pi[$ alors, pour tout entier naturel non nul k, $\frac{a}{2^k}$ est dans $]0,\pi[$ et donc $\sin\frac{a}{2^k}\neq 0$. De plus, puisque $\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)=\sin\left(2\times\frac{a}{2^k}\right)=2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}=\frac{1}{2^n}\frac{\sin(a)\sin\left(\frac{a}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}=\frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}.$$

$$\boxed{\forall a\in]0,\pi[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)=\frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}.}$$

2. $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)>0$ car $\frac{a}{2^k}$ est dans $]0,\frac{\pi}{2}[$. Puis

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right)-\ln\left(\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\right).$$

Maintenant, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right)-\ln\left(\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).$$

$$\boxed{\forall a \in]0,\pi[,\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}2^{4\cos^2 x+1}+16.2^{4\sin^2 x-3}=20 &\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x+1}+16.2^{1-4\cos^2 x}=20 \Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x}-10+16\times 2^{-4\cos^2 x}=0\\ &\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x}-10+\frac{16}{2^{4\cos^2 x}}=0 \Leftrightarrow (2^{4\cos^2 x})^2-10\times 2^{4\cos^2 x}+16=0\\ &\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x}=2 \text{ ou } 2^{4\cos^2 x}=8 \Leftrightarrow 4\cos^2 x=1 \text{ ou } 4\cos^2 x=3\\ &\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x=-\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Tout d'abord, d'après la formule de MOIVRE,

$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^3=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta),$$

et par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta \text{ et } \sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.}$$

Ensuite, $\tan(3\theta)$ et $\tan\theta$ existent $\Leftrightarrow 3\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ et $\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$. Soit donc $\theta\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

$$\tan(3\theta)=\frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)}=\frac{3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta}{\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta}=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^3\theta$.

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right),\ \tan(3\theta)=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}.}$$

2. Soit $a\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **1ère méthode.** a est bien sûr racine de l'équation proposée, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2} &\Leftrightarrow (3x-x^3)(1-3a^2)=(1-3x^2)(3a-a^3) \text{ (car } \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ne sont pas solution de l'équation)}\\ &\Leftrightarrow (x-a)((3a^2-1)x^2+8ax-a^2+3)=0.\end{aligned}$$

Le discriminant réduit du trinôme $(3a^2-1)x^2+8ax-a^2+3$ vaut :

$$\Delta'=16a^2-(3a^2-1)(-a^2+3)=3a^4+6a^2+3=(\sqrt{3}(a^2+1))^2>0.$$

L'équation proposée a donc trois racines réelles :

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{a,\frac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2},\frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}\right\}.}$$

2ème méthode. Il existe un unique réel $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\left\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$ tel que $a=\tan\alpha$. De même, si x est un réel distinct de $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, il existe un unique réel $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\left\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$ tel que $x=\tan\theta$ (à savoir $\alpha=\arctan a$ et $\theta=\arctan x$). Comme $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas solution de l'équation proposée, on a :

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}\Leftrightarrow\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\Leftrightarrow\tan(3\theta)=\tan(3\alpha)$$
$$\Leftrightarrow 3\theta\in 3\alpha+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta\in\alpha+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}.$$

Ceci refournit les solutions $x=\tan\alpha=a$, puis

$$x=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{a+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a}=\frac{(a+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}a)}{1-3a^2}=\frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2},$$

et $x=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Pour $x\notin\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$,

$$\tan(5x)=\frac{\mathrm{Im}((e^{ix})^5)}{\mathrm{Re}((e^{ix})^5)}=\frac{5\cos^4x\sin x-10\cos^2x\sin^3x+\sin^5x}{\cos^5x-10\cos^3x\sin^2x+5\cos x\sin^4x}=\frac{5\tan x-10\tan^3x+\tan^5x}{1-10\tan^2x+5\tan^4x},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^5 x$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\right),\ \tan(5x)=\frac{5\tan x-10\tan^3x+\tan^5x}{1-10\tan^2x+5\tan^4x}.}$$

2. $9°$, $-27°$, $-63°$ et $81°$ vérifient $\tan(5\times 9°)=\tan(5\times(-27°))=\tan(5\times(-63°))=\tan(5\times 81°)=1$. On résoud donc l'équation :

$$\tan(5x)=1\Leftrightarrow 5x\in\left(\frac{\pi}{4}+\pi\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\right).$$

Les solutions, exprimées en degrés et éléments de $]-90°,90°[$, sont $-63°$, $-27°$, $9°$, $45°$ et $81°$. Ainsi, les cinq nombres $\tan(-63°)$, $\tan(-27°)$, $\tan(9°)$, $\tan(45°)$ et $\tan(81°)$ sont deux à deux distincts et solutions de l'équation $\frac{5X-10X^3+X^5}{1-10X^2+5X^4}=1$ qui s'écrit encore :

$$X^5-5X^4-10X^3+10X^2+5X-1=0.$$

Le polynôme $X^5-5x^4-10X^3+10X^2+5X-1$ admet déjà $\tan(45°)=1$ pour racine et on a

$$X^5-5X^4-10X^3+10X^2+5X-1=(X-1)(X^4-4X^3-14X^2-4X+1).$$

Les quatre nombres $\tan(-63°)$, $\tan(-27°)$, $\tan(9°)$ et $\tan(81°)$ sont ainsi les racines du polynôme $X^4-4X^3-14X^2-4X+1$. Ce dernier peut donc encore s'écrire $(X-\tan(9°))(X+\tan(27°))(X+\tan(63°))(X-\tan(81°))$. L'opposé du coefficient de X^3 à savoir 4 vaut donc également $\tan(9°)-\tan(27°)-\tan(63°)+\tan(81°)$ et on a montré que :

$$\boxed{\tan(9°) - \tan(27°) - \tan(63°) + \tan(81°) = 4.}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Pour $x \in [0, \pi]$, posons $f(x) = \tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x)$.

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow \tan x,\ \tan(2x),\ \tan(3x) \text{ et } \tan(4x) \text{ existent} \\ &\Leftrightarrow (x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}),\ (2x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}),\ (3x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \text{ et } (4x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow (x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}),\ (x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}),\ (x \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}) \text{ et } (x \notin \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow x \notin \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8}\right\}. \end{aligned}$$

f est définie et continue sur

$$\left[0, \frac{\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{8}, \pi\right].$$

Sur chacun des dix intervalles précédents, f est définie, continue et strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes. La restriction de f à chacun de ces dix intervalles est donc bijective de l'intervalle considéré sur l'intervalle image, ce qui montre déjà que l'équation proposée, que l'on note dorénavant (E), a au plus une solution par intervalle et donc au plus dix solutions dans $[0, \pi]$. Sur $I = \left[0, \frac{\pi}{8}\right[$ ou $I = \left]\frac{7\pi}{8}, \pi\right]$, puisque $f(0) = f(\pi) = 0$, (E) a exactement une solution dans I. Ensuite, dans l'expression de somme f, une et une seule des quatre fonctions est un infiniment grand en chacun des nombres considérés ci-dessus, à l'exception de $\frac{\pi}{2}$. En chacun de ces nombres, f est un infiniment grand. L'image par f de chacun des six intervalles ouverts n'ayant pas $\frac{\pi}{2}$ pour borne est donc $]-\infty, +\infty[$ et (E) admet exactement une solution dans chacun de ces intervalles d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ceci porte le total à $6 + 2 = 8$ solutions. En $\frac{\pi}{2}^-$, $\tan x$ et $\tan(3x)$ tendent vers $+\infty$ tandis que $\tan(2x)$ et $\tan(4x)$ tendent vers 0. f tend donc vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}^-$, et de même f tend vers $-\infty$ en $\frac{\pi}{2}^+$. L'image par f de chacun des deux derniers intervalles est donc encore une fois $]-\infty, +\infty[$. Finalement,

$$\boxed{(E) \text{ admet exactement dix solutions dans } [0, \pi].}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. D'après les formules d'EULER,

$$z + z^4 = e^{2i\pi/5} + e^{8i\pi/5} = e^{2i\pi/5} + e^{-2i\pi/5} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = a.$$

   De même,

$$z^2 + z^3 = e^{4i\pi/5} + e^{6i\pi/5} = e^{4i\pi/5} + e^{-4i\pi/5} = 2\cos\frac{4\pi}{5} = b.$$

2. Puisque $z \neq 1$ et $z^5 = e^{2i\pi} = 1$,

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z} = \frac{1 - 1}{1 - z} = 0.$$

3. $a+b=z+z^2+z^3+z^4=-1$ et $ab=(z+z^4)(z^2+z^3)=z^3+z^4+z^6+z^7=z+z^2+z^3+z^4=-1$. Donc,

$$a+b=-1 \text{ et } ab=-1.$$

Ainsi, a et b sont les solutions de l'équation $X^2+X-1=0$ à savoir les nombres $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Puisque $\frac{2\pi}{5}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\frac{4\pi}{5}\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, on a $a>0$ et $b>0$. Finalement,

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}.}$$

Correction de l'exercice 14 ▲

1. $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ et une primitive de $x\mapsto\cos^2 x$ est $x\mapsto\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin(2x))$.
2. D'après les formules d'EULER,

$$\begin{aligned}\cos^4 x&=\left(\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\right)^4=\frac{1}{16}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})\\&=\frac{1}{16}(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6)=\frac{1}{8}(\cos(4x)+4\cos(2x)+3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x\mapsto\cos^4 x$ est $x\mapsto\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(4x)+2\sin(2x)+3x)$.

3.

$$\begin{aligned}\sin^4 x&=\left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^4=\frac{1}{16}(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix})\\&=\frac{1}{16}(2\cos(4x)-8\cos(2x)+6)=\frac{1}{8}(\cos(4x)-4\cos(2x)+3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x\mapsto\sin^4 x$ est $x\mapsto\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(4x)-2\sin(2x)+3x)$.

4. $\cos^2 x\sin^2 x=\frac{1}{4}\sin^2(2x)=\frac{1}{8}(1-\cos(4x))$ et une primitive de la fonction $x\mapsto\cos^2 x\sin^2 x$ est $x\mapsto\frac{1}{8}(x-\frac{1}{4}\sin(4x))$.
5.

$$\begin{aligned}\sin^6 x&=\left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^6=-\frac{1}{64}(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix})\\&=-\frac{1}{64}(2\cos(6x)-12\cos(4x)+30\cos(2x)-20)=\frac{1}{32}(-\cos(6x)+6\cos(4x)-15\cos(2x)+10)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x\mapsto\sin^6 x$ est $x\mapsto\frac{1}{32}(-\frac{1}{6}\sin(6x)+\frac{3}{2}\sin(4x)-\frac{15}{2}\sin(2x)+10x)$.

6. $\cos x\sin^6 x=\sin' x\sin^6 x$ et une primitive de $x\mapsto\cos x\sin^6 x$ est $x\mapsto\frac{1}{7}\sin^7 x$.
7. $\cos^5 x\sin^2 x=\cos x(1-\sin^2 x)^2\sin^2 x=\sin' x\sin^2 x-2\sin' x\sin^4 x+\sin' x\sin^6 x$ et une primitive de $x\mapsto\cos^5 x\sin^2 x$ est $x\mapsto\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x$.
8. $\cos^3 x=\sin' x-\sin' x\sin^2 x$ et une primitive de $x\mapsto\cos^3 x$ est $x\mapsto\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Pour x réel , on a :

$$\begin{aligned}
\cos^4 x\sin^6 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\right)^4\left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^6\\
&= -\frac{1}{2^{10}}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix})\\
&= -\frac{1}{2^{10}}(e^{10ix}-2e^{8ix}-3e^{6ix}+8e^{4ix}+2e^{2ix}-12+2e^{-2ix}+8e^{-4ix}-3e^{-6ix}-2e^{-8ix}+e^{-10ix})\\
&= -\frac{1}{2^9}(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6)\\
&= -\frac{1}{512}(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6)
\end{aligned}$$

(Remarque. La fonction proposée était paire et l'absence de sinus était donc prévisible. Cette remarque guidait aussi les calculs intermédiaires : les coefficients de e^{-2ix}, e^{-4ix},... étaient les mêmes que ceux de e^{2ix}, e^{4ix},...) Par suite,

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{512}\left(\left[\frac{\sin 10x}{10}-\frac{\sin 8x}{4}-\frac{\sin 6x}{2}+2\sin 4x+\sin 2x\right]_{\pi/6}^{\pi/3}-6\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{512}\left(\frac{1}{10}(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{2}(0-0)+2(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})-\pi\right)\\
&= -\frac{1}{512}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}-2\sqrt{3}-\pi\right)=\frac{9\sqrt{3}+4\pi}{2048}.
\end{aligned}$$

2. Pour x réel, on a

$$\begin{aligned}
\cos^4 x\sin^7 x = \cos^4 x\sin^6 x\sin x &= \cos^4 x(1-\cos^2 x)^3\sin x\\
&= \cos^4 x\sin x-3\cos^6 x\sin x+3\cos^8 x\sin x-\cos^{10} x\sin x.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
J &= \left[-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{3\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^9 x}{3}+\frac{\cos^{11} x}{11}\right]_{\pi/6}^{\pi/3}\\
&= -\frac{1}{5}\times\frac{1-9\sqrt{3}}{32}+\frac{3}{7}\times\frac{1-27\sqrt{3}}{128}-\frac{1}{3}\times\frac{1-81\sqrt{3}}{512}+\frac{1}{11}\times\frac{1-243\sqrt{3}}{2048}\\
&= \frac{1}{2^{11}\times 3\times 5\times 7\times 11}(-14784(1-9\sqrt{3})+7920(1-27\sqrt{3})-1540(1-81\sqrt{3})+105(1-243\sqrt{3}))\\
&= \frac{1}{2365440}(-8299+18441\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. $\tan\frac{x}{2}$ existe si et seulement si $x\notin \pi+2\pi\mathbb{Z}$ et $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ existe si et seulement si $x\notin\pi\mathbb{Z}$. Pour $x\notin\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}.$$

2. **1 ère solution.** Pour tout réel x,

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3})+\sin x+\sin(x+\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\sin x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0,$$

2 ème solution.

$$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin x+\sin(x+\frac{2\pi}{3})=\mathrm{Im}(e^{i(x-\frac{2\pi}{3})}+e^{ix}+e^{i(x+\frac{2\pi}{3})})=\mathrm{Im}(e^{ix}(j^2+1+j))=0.$$

3. $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ et $\frac{2}{\cos(2x)}$ existent si et seulement si $\frac{\pi}{4}-x$, $\frac{\pi}{4}+x$ et $2x$ ne sont pas dans $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $x\notin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc, pour $x\notin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)&=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}+\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\ (\text{pour } x \text{ vérifiant de plus } x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\\&=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}+\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{(\cos x-\sin x)^2+(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{2(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\cos(2x)}\\&=\frac{2}{\cos(2x)}\ (\text{ce qui reste vrai pour } x\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

4. Pour $x\notin\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\tan x}-\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}=\frac{2}{\tan(2x)}.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

1. • Pour tout réel x, $1-2k\cos x+k^2=(k-\cos x)^2+\sin^2 x\geqslant 0$. De plus,

$$1-2k\cos x+k^2=0\Rightarrow k-\cos x=\sin x=0\Rightarrow x\in\pi\mathbb{Z}\text{ et }k=\cos x\Rightarrow k\in\{-1,1\},$$

ce qui est exclu. Donc,

$$\forall k\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \forall x\in\mathbb{R},\ 1-2k\cos x+k^2>0.$$

•f_k est donc définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux, impaire et 2π-périodique. On l'étudie dorénavant sur $[0,\pi]$. Pour $x\in[0,\pi]$, on a :

$$\begin{aligned}f_k'(x)&=\cos x(1-2k\cos x+k^2)^{-1/2}-\frac{1}{2}\sin x(2k\sin x)(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}\\&=(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(\cos x(1-2k\cos x+k^2)-k\sin^2 x)\\&=(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(-k\cos^2 x+(1+k^2)\cos x-k)\\&=(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k\cos x-1)(k-\cos x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f_k'(x)=\frac{(k\cos x-1)(k-\cos x)}{(1-2k\cos x+k^2)^{3/2}}.}$$

er cas : $|k| < 1$ et $k \neq 0$. (si $k = 0$, $f_k(x) = \sin x$) Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k\cos x-1) < 0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $\cos x - k$.

x	0		$\text{Arccos}\, k$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(car $f_k(\arccos k) = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-2k^2+k^2}} = 1$).

2ème cas : $k > 1$. Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k-\cos x) > 0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $k\cos x - 1$.

x	0		$\text{Arccos}\, \frac{1}{k}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{k}$	$\searrow$	0

(car $f_k(\arccos \frac{1}{k}) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}} = \frac{1}{k}$).

3ème cas : $k < -1$. Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k-\cos x) < 0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $1 - k\cos x$.

x	0		$\text{Arccos}\, \frac{1}{k}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$-\frac{1}{k}$	$\searrow$	0

(car $f_k(\arccos \frac{1}{k}) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}} = -\frac{1}{k}$).

2. Pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, posons $I_k = \int_0^\pi f_k(x)\, dx$.
   Si $k = 0$, $I_k = \int_0^\pi \sin x\, dx = 2$. Sinon,

$$
\begin{aligned}
I_k &= \frac{1}{k}\int_0^\pi \frac{2k\sin x}{2\sqrt{1-2k\cos x+k^2}}\, dx = \frac{1}{k}\left[\sqrt{1-2k\cos x+k^2}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{k}(\sqrt{1+2k+k^2} - \sqrt{1-2k+k^2}) = \frac{1}{k}(|k+1| - |k-1|).
\end{aligned}
$$

   Plus précisément, si $k \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $I_k = \frac{1}{k}((1+k)-(1-k)) = 2$, ce qui reste vrai pour $k = 0$. Si $k > 1$, $I_k = \frac{1}{k}((1+k)-(k-1)) = \frac{2}{k}$, et enfin, si $k < -1$, $I_k = \frac{-2}{k}$. En résumé,

$$\boxed{\text{Si } k \in]-1,1[,\ I_k = 2 \text{ et si } k \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\ I_k = \frac{2}{|k|}.}$$

Correction de l'exercice 18 ▲

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S_n' = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

1ère solution.

$$S_n+iS'_n=\sum_{k=0}^{n}(\cos(kx)+i\sin(kx))=\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k.$$

Maintenant, $e^{ix}=1\Leftrightarrow x\in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc,

1er cas. Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $S_n=n+1$ et $S'_n=0$.

2ème cas. Si x$\notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}S_n+iS'_n&=\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}}\frac{e^{-i(n+1)x/2}-e^{i(n+1)x/2}}{e^{-i(n+1)x/2}+e^{i(n+1)x/2}}=e^{inx/2}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}\\&=e^{inx/2}\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=\begin{cases}\frac{\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\text{ si }x\notin 2\pi\mathbb{Z}\\ n+1\text{ si }x\in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}\text{ et }\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)=\begin{cases}\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\text{ si }x\notin 2\pi\mathbb{Z}\\ 0\text{ si }x\in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}}$$

2ème solution.

$$\begin{aligned}2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)&=\sum_{k=0}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos(kx)=\sum_{k=0}^{n}(\sin(k+\frac{1}{2})x-\sin(k-\frac{1}{2})x)\\&=\left(\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{-x}{2}\right)+\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+\ldots+\left(\sin\frac{(2n-1)x}{2}-\sin\frac{(2n-3)x}{2}\right)\\&+\left(\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{(2n-1)x}{2}\right)\\&=\sin\frac{(2n+1)x}{2}+\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}\end{aligned}$$

et donc, si $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$,...

2. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. Posons $S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)$ et $S'_n=\sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)$. On a :

$$S_n+S'_n=\sum_{k=0}^{n}(\cos^2(kx)+\sin^2(kx))=\sum_{k=0}^{n}1=n+1,$$

et

$$S_n-S'_n=\sum_{k=0}^{n}(\cos^2(kx)-\sin^2(kx))=\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx).$$

D'après 1), si $x\in\pi\mathbb{Z}$, on trouve immédiatement,

$$\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)=n+1\text{ et }\sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)=0,$$

et si $x\notin\pi\mathbb{Z}$,

$$S_n+S'_n=n+1\text{ et }S_n-S'_n=\frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x},$$

de sorte que

$$S_n=\frac{1}{2}\left(n+1+\frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x}\right)\text{ et }S'_n=\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x}\right).$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx)\right) + i\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx)\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{ix})^k 1^{n-k}$$
$$= (1+e^{ix})^n = (e^{ix/2}+e^{-ix/2})^n e^{inx/2} = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right).$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx) = 2^n \cos^n\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{nx}{2}\right) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx) = 2^n \cos^n\left(\tfrac{x}{2}\right)\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right).}$$

Correction de l'exercice 19 ▲

$$\left\{\begin{array}{l}\cos a+\cos b+\cos c=0\\ \sin a+\sin b+\sin c=0\end{array}\right. \Leftrightarrow (\cos a+\cos b+\cos c)+i(\sin a+\sin b+\sin c)=0 \Leftrightarrow e^{ia}+e^{ib}+e^{ic}=0$$
$$\Rightarrow |e^{ia}+e^{ib}| = |-e^{ic}| = 1 \Leftrightarrow |e^{ia/2}e^{ib/2}(e^{i(a-b)/2}+e^{-i(a-b)/2})| = 1$$
$$\Leftrightarrow |\cos\frac{a-b}{2}| = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \in \left(\frac{\pi}{3}+\pi\mathbb{Z}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow a-b \in \left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right)$$
$$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ \exists \varepsilon\in\{-1,1\}/\ b = a+\varepsilon\frac{2\pi}{3}+2k\pi.$$

Par suite, nécessairement, $e^{ib} = je^{ia}$ ou $e^{ib} = j^2e^{ia}$. Réciproquement, si $e^{ib} = je^{ia}$ ou encore $b = a+\frac{2\pi}{3}+2k\pi$,

$$e^{ia}+e^{ib}+e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia}+e^{ib}) = -(1+j)e^{ia} = j^2e^{ia} \Leftrightarrow \exists k'\in\mathbb{Z}/\ c = a-\frac{2\pi}{3}+2k'\pi,$$

et si $e^{ib} = j^2e^{ia}$ ou encore $b = a-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$,

$$e^{ia}+e^{ib}+e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia}+e^{ib}) = -(1+j^2)e^{ia} = je^{ia} \Leftrightarrow \exists k'\in\mathbb{Z}/\ c = a+\frac{2\pi}{3}+2k'\pi.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{(a, a+\varepsilon\tfrac{2\pi}{3}+2k\pi, a-\varepsilon\tfrac{2\pi}{3}+2k'\pi),\ a\in\mathbb{R},\ \varepsilon\in\{-1,1\},\ (k,k')\in\mathbb{Z}^2\}.}$$

Correction de l'exercice 20 ▲

$$\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8} = 2(\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}) = 2(\cos^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8})$$
$$= 2\left((\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8})^2-2\cos^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 2(1-\frac{1}{4}) = \frac{3}{2}$$

Correction de l'exercice 21 ▲

1.

$$\cos(3x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi)$$
$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\tfrac{\pi}{10}, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{9\pi}{10}, \tfrac{13\pi}{10}, \tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{17\pi}{10}\right\}.}$$

2. $\cos(3x) = \mathrm{Re}(e^{3ix}) = \mathrm{Re}((\cos x + i\sin x)^3) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.}$$

Par suite,

$$\cos(3x) = \sin(2x) \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 x - 3 - 2\sin x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x(-4\sin^2 x - 2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x = 0) \text{ ou } (4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0).$$

D'après 1), l'équation $4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$ admet entre autre pour solutions $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{13\pi}{10}$ (car, dans chacun des deux cas, $\cos x \neq 0$), ou encore, l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$ admet pour solutions les deux nombres **distincts** $X_1 = \sin\frac{\pi}{10}$ et $X_2 = \sin\frac{13\pi}{10}$, qui sont donc les deux solutions de cette équation. Puisque $X_1 > 0$ et que $X_2 < 0$, on obtient

$$X_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } X_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Donc, (puisque $\sin\frac{13\pi}{10} = -\sin\frac{3\pi}{10}$),

$$\boxed{\sin\tfrac{\pi}{10} = \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin\tfrac{3\pi}{10} = \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Ensuite, $\sin\frac{3\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{5}$, et donc

$$\boxed{\cos\tfrac{\pi}{5} = \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Puis

$$\boxed{\cos\tfrac{\pi}{10} = \sqrt{1-\sin^2\tfrac{\pi}{10}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

et de même

$$\boxed{\sin\tfrac{\pi}{5} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \cos\tfrac{3\pi}{10}}.$$