



## Sujets de l'année 2004-2005

---

### 1 Devoir à la maison

#### Exercice 1

Soit  $M$  la matrice réelle  $3 \times 3$  suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de  $M$ .
2. Montrer que  $M$  est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et  $P$  la matrice de passage.
4. On a  $D = P^{-1}MP$ , pour  $k \in \mathbb{N}$  exprimer  $M^k$  en fonction de  $D^k$ , puis calculer  $M^k$ .

Correction ▼

[002563]

#### Exercice 2

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $K$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), on appelle *projecteur* un endomorphisme  $p$  de  $E$  vérifiant  $p \circ p = p$ . Soit  $p$  un projecteur.

1. Montrer que  $\text{Id}_E - p$  est un projecteur, calculer  $p \circ (\text{Id}_E - p)$  et  $(\text{Id}_E - p) \circ p$ .
2. Montrer que pour tout  $\vec{x} \in \text{Im } p$ , on a  $p(\vec{x}) = \vec{x}$ .
3. En déduire que  $\text{Im } p$  et  $\text{ker } p$  sont supplémentaires.
4. Montrer que le rang de  $p$  est égal à la trace de  $p$ . (On rappelle que la trace de la matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base dans laquelle on exprime cette matrice.)

Correction ▼

[002564]

#### Exercice 3

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice carrée  $n \times n$ . On veut démontrer le résultat suivant dû à Hadamard : Supposons que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on ait

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

alors  $A$  est inversible.

1. Montrer le résultat pour  $n = 2$ .
2. Soit  $B$ , la matrice obtenue en remplaçant, pour  $j \geq 2$ , chaque colonne  $c_j$  de  $A$  par la colonne

$$c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}}c_1,$$

Calculer les  $b_{ij}$  en fonction des  $a_{ij}$ . Montrer que si les coefficients de  $A$  satisfont les inégalités ci-dessus, alors pour  $i \geq 2$ , on a

$$|b_{ii}| > \sum_{j=2, j \neq i}^n |b_{ij}|.$$

3. Démontrer le résultat de Hadamard pour  $n$  quelconque.

[Correction ▼](#)

[002565]

## 2 Partiel

### Exercice 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que  $A$  est diagonalisable et trouver une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

[Correction ▼](#)

[002566]

### Exercice 5

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factoriser le polynôme caractéristique de  $A$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  ? dans  $\mathbb{C}$  ?

[Correction ▼](#)

[002567]

### Exercice 6

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Démontrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

[Correction ▼](#)

[002568]

### Exercice 7

Soit  $A$  la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer  $A^2$  et vérifier que  $A^2 = A + 2I_3$ . En déduire que  $A$  est inversible et donner son inverse en fonction de  $A$ .

[Correction ▼](#)

[002569]

### Exercice 8

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . On suppose que  $A$  est inversible et que  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre de  $A$ .

1. Démontrer que  $\lambda \neq 0$ .
2. Démontrer que si  $\vec{x}$  est un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$  alors il est vecteur propre de  $A^{-1}$  de valeur propre  $\lambda^{-1}$ .

[Correction ▼](#)

[002570]

### Exercice 9

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $f^2 = \mathrm{Id}_E$ .

1. Démontrer que les seules valeurs propres possibles de  $f$  sont 1 et  $-1$ .

2. Vérifier que pour tout  $\vec{x} \in E$ , on a

$$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x})) \text{ et } f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$$

et en déduire que  $f$  admet toujours une valeur propre.

3. Démontrer que si 1 et  $-1$  sont valeurs propres, alors  $E$  est somme directe des sous-espaces propres correspondants.

4. Traduire géométriquement sur un dessin dans le cas  $n = 2$ .

Correction ▼

[002571]

### 3 Examen

#### Exercice 10

(9 points) Soit  $A$  la matrice de  $M_3(\mathbb{R})$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que les valeurs propres de  $A$  sont 1 et 2.

2. Déterminer les sous-espaces propres de  $A$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de  $A$ .

4. Déterminer une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à  $A$  est

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En déduire la décomposition de Dunford de  $B$ .

5. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x - y + z \end{cases}$$

[002572]

#### Exercice 11

(7 points) On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}).$$

1. Déterminer une matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $n \geq 1$  on ait

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Justifier.

2. Déterminer le polynôme caractéristique  $P_A(X)$  de  $A$  et calculer ses racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .
3. Soit  $R_n(X) = a_nX + b_n$  le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $P_A(X)$ . Calculer  $a_n$  et  $b_n$  (on pourra utiliser les racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ).
4. Montrer que  $A^n = a_nA + b_nI_2$ , en déduire que la matrice  $A^n$  converge lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  vers une limite  $A_\infty$  que l'on déterminera. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

[002573]

### Exercice 12

(5 points) Soit  $A$  une matrice carrée,  $A \in M_n(K)$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux et que  $\text{tr}(BAB^{-1}) = \text{tr}A$ .

Démontrer que  $\det(\exp A) = e^{\text{tr}A}$  dans les cas suivants :

1.  $A$  diagonalisable.
2.  $A$  triangulaire supérieure ayant une diagonale de zéros.
3.  $A$  trigonalisable.
4.  $A$  quelconque.

[002574]

## 4 Rattrapage

### Exercice 13

(7 points) On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}).$$

1. Déterminer une matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $n \geq 1$  on ait

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Justifier.

2. Déterminer le polynôme caractéristique  $P_A(X)$  de  $A$  et calculer ses racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .
3. Soit  $R_n(X) = a_nX + b_n$  le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $P_A(X)$ . Calculer  $a_n$  et  $b_n$  (on pourra utiliser les racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ).
4. Montrer que  $A^n = a_nA + b_nI_2$ , en déduire que la matrice  $A^n$  converge lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  vers une limite  $A_\infty$  que l'on déterminera. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

[002573]

### Exercice 14

(5 points) Soit  $A$  une matrice carrée,  $A \in M_n(K)$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux et que  $\text{tr}(BAB^{-1}) = \text{tr}A$ .

Démontrer que  $\det(\exp A) = e^{\text{tr}A}$  dans les cas suivants :

1.  $A$  diagonalisable.
2.  $A$  triangulaire supérieure ayant une diagonale de zéros.

3.  $A$  trigonalisable.

4.  $A$  quelconque.

[002574]

### Exercice 15

(4 points) On suppose qu'une population  $x$  de lapins et une population  $y$  de loups sont gouvernées par le système suivant d'équations différentielles :

$$(S) \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

1. Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Exprimer le système  $(S)$  et ses solutions dans une base de vecteurs propres de  $A$ .

3. Représenter graphiquement les trajectoires de  $(S)$  dans le repère  $(Oxy)$ .

4. Discuter graphiquement l'évolution de la population des lapins en fonction des conditions initiales.

Correction ▼

[002575]

### Exercice 16

(9 points) Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ , dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de  $A$ . L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?

2. Calculer  $(A - I)^2$ . Montrer que  $A^n = nA + (1 - n)I$  en utilisant la formule du binôme de Newton.

3. Soient  $P(X) = (X - 1)^2$  et  $Q \in \mathbb{R}[X]$ . Exprimer le reste de la division euclidienne de  $Q$  par  $P$  en fonction de  $Q(1)$  et  $Q'(1)$ , où  $Q'$  est le polynôme dérivé de  $Q$ . En remarquant que  $P(A) = 0$  et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme  $Q$ , retrouver  $A^n$ .

4. (a) Montrer que l'image de  $\mathbb{R}^3$  par l'endomorphisme  $u - \text{Id}$  est un sous-espace vectoriel de dimension 1, on notera  $\varepsilon_2$  une base.

(b) Déterminer un vecteur  $\varepsilon_3$  tel que  $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ . Déterminer un vecteur propre  $\varepsilon_1$  de  $u$  non colinéaire à  $\varepsilon_2$ .

(c) Montrer que  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Ecrire la matrice de  $u$  dans cette base, ainsi que les matrices de passage.

(d) Retrouver  $A^n$ .

Correction ▼

[002576]

### Exercice 17

(7 points) Soient  $M$  et  $A$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $MA = AM$ . On suppose que  $M$  admet  $n$  valeurs propres distinctes.

1. Soit  $x$  un vecteur propre de  $M$  de valeur propre  $\lambda$ , montrer que  $MAx = \lambda Ax$ , en déduire que les vecteurs  $x$  et  $Ax$  sont colinéaires, puis que tout vecteur propre de  $M$  est un vecteur propre de  $A$ .

2. On note maintenant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $M$  et  $\mu_1, \dots, \mu_n$  celles de  $A$ .

(a) Montrer par récurrence sur  $n$  l'égalité suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j).$$

En déduire que le système suivant

$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} \\ \vdots \\ \mu_n = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1} \end{cases}$$

admet une unique solution  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ .

(b) Soient  $M'$  et  $A'$  les matrices diagonales suivantes :

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe des réels  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k$$

et en déduire qu'il existe des réels  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  tels que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

## Correction de l'exercice 1 ▲

Soit  $M$  la matrice réelle  $3 \times 3$  suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminons les valeurs propres de  $M$ .

Ce sont les racines du polynôme caractéristique

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ 3 & -2-X & 0 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & -2-X \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (1-X) \begin{vmatrix} -X & 2 \\ 3 & -2-2X \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$= (1-X)(X^2 + 2X - 8) \quad (2)$$

$$= (1-X)(X+4)(X-2). \quad (3)$$

La matrice  $M$  admet donc trois valeurs propres distinctes qui sont : 1, 2, et  $-4$ .

2. Montrons que  $M$  est diagonalisable.

Nous venons de voir que  $M$ , matrice réelle  $3 \times 3$ , admet trois valeurs propres réelles distinctes, cela prouve que  $M$  est diagonalisable.

3. Déterminons une base de vecteurs propres et  $P$  la matrice de passage.

Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

$\lambda = 1$  : Le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x, y, z)$  est un vecteur propre pour la valeur propre 1 si et seulement si

$$\begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = 1$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\vec{e}_1$  de coordonnées  $(1, 1, 1)$ .

$\lambda = 2$  : Le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x, y, z)$  est un vecteur propre pour la valeur propre 2 si et seulement si

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = 2$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\vec{e}_2$  de coordonnées  $(4, 3, -2)$ .

$\lambda = -4$  : Le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x, y, z)$  est un vecteur propre pour la valeur propre  $-4$  si et seulement si

$$\begin{cases} -4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ 2y + 3x = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = -4$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\vec{e}_3$  de coordonnées  $(2, -3, 2)$ .

Les vecteurs  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  forment une base de  $E$  composée de vecteurs propres, la matrice de passage  $P$  est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Exprimons  $M^k$  en fonction de  $D^k$ , puis calculons  $M^k$ .

On a

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

pour  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix},$$

et  $M^k = PD^kP^{-1}$ .

Calculons donc la matrice  $P^{-1}$  : on a  $P^{-1} = \frac{1}{\det P}(\text{com}P)^t$ . Or

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -30,$$

et

$$\text{com}P = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -12 & 0 & 6 \\ -18 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$P^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$M^k = PD^kP^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -5 \cdot 2^{k+2} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 + 5 \cdot 2^{k+2} - 2(-4)^k \\ -15 \cdot 2^k - 15(-4)^k & -12 - 18(-4)^k & -18 + 5 \cdot 2^{k+1} + 3(-4)^k \\ 5 \cdot 2^{k+1} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 - 5 \cdot 2^{k+1} - 2(-4)^k \end{pmatrix}$$

### Correction de l'exercice 2 ▲

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $K$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), on appelle *projecteur* un endomorphisme  $p$  de  $E$  vérifiant  $p \circ p = p$ . Soit  $p$  un projecteur.

1. Montrons que  $\text{Id}_E - p$  est un projecteur et calculons  $p \circ (\text{Id}_E - p)$  et  $(\text{Id}_E - p) \circ p$ .

On a  $(\text{Id}_E - p) \circ (\text{Id}_E - p) = \text{Id}_E - p - p + p^2 = \text{Id}_E - p$ , car  $p^2 = p$ , ce qui prouve que  $\text{Id}_E - p$  est un projecteur.

Par ailleurs, on a

$$p \circ (\text{Id}_E - p) = p - p^2 = p - p = 0 = (\text{Id}_E - p) \circ p$$

donc pour tout  $\vec{x} \in E$ , on a  $p(\vec{x} - p(\vec{x})) = \vec{0}$ .

2. Montrons que pour tout  $\vec{x} \in \text{Im } p$ , on a  $p(\vec{x}) = \vec{x}$ .

Soit  $\vec{x} \in \text{Im } p$ , il existe  $\vec{y} \in E$  tel que  $\vec{x} = p(\vec{y})$ , on a donc  $p(\vec{x}) = p^2(\vec{y}) = p(\vec{y}) = \vec{x}$ .

3. On en déduit que  $\text{Im } p$  et  $\ker p$  sont supplémentaires.

Soit  $\vec{x} \in E$ , on peut écrire  $\vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x})$ , considérons  $\vec{x} - p(\vec{x})$ , on a  $p(\vec{x} - p(\vec{x})) = 0$

ce qui prouve que  $\vec{x} - p(\vec{x}) \in \ker p$ . Ainsi tout élément de  $E$  s'écrit comme somme d'un élément de  $\text{Im } p$ ,  $p(\vec{x})$ , et d'un élément de  $\ker p$ ,  $\vec{x} - p(\vec{x})$ , il nous reste à démontrer que la somme est directe.

Soit  $\vec{x} \in \text{Im } p \cap \ker p$ , on a, d'une part  $p(\vec{x}) = \vec{x}$  d'après la question 2) car  $\vec{x} \in \text{Im } p$  et, d'autre part  $p(\vec{x}) = \vec{0}$  car  $\vec{x} \in \ker p$ , d'où  $\vec{x} = \vec{0}$ . On a donc

$$E = \text{Im } p \oplus \ker p.$$

(Sachant que  $\dim E = \dim \ker p + \dim \text{Im } p$ , on pouvait se contenter de démontrer que  $\text{Im } p \cap \ker p = \vec{0}$ , ici nous avons explicitement la décomposition.)

4. Montrons que le rang de  $p$  est égal à la trace de  $p$ .

Notons  $n$  la dimension de  $E$  et considérons une base de  $E$  de la forme

$$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n)$$

où  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$  est une base de  $\text{Im } p$  et  $(\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n)$  une base de  $\ker p$ . dans une telle base, la matrice de  $p$  s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $I_k$  désigne la matrice identité  $k \times k$ , et les 0 des blocs de zéros. Le rang de  $p$  est égal à la dimension de  $\text{Im } p$  c'est-à-dire ici à  $k$  et on a bien  $k = \text{Tr } M = \text{Tr } p$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice carrée  $n \times n$ . On veut démontrer le résultat suivant dû à Hadamard : Supposons que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on ait

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

alors  $A$  est inversible.

1. Montrons le résultat pour  $n = 2$ .

Dans ce cas, la matrice  $A$  s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

et les hypothèses deviennent

$$|a_{11}| > |a_{12}| \text{ et } |a_{22}| > |a_{21}|.$$

La matrice  $A$  est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, or

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

et, compte tenu des hypothèses,

$$|a_{11}a_{22}| = |a_{11}||a_{22}| > |a_{12}||a_{21}| = |a_{12}a_{21}|,$$

ainsi  $|a_{11}a_{22}| > |a_{12}a_{21}|$  donc  $a_{12}a_{21} \neq a_{11}a_{22}$  et le déterminant est non nul.

2. Soit  $B$ , la matrice obtenue en remplaçant, pour  $j \geq 2$ , chaque colonne  $c_j$  de  $A$  par la colonne

$$c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}}c_1,$$

Calculons les  $b_{ij}$  en fonction des  $a_{ij}$ . Montrons que si les coefficients de  $A$  satisfont les inégalités ci-dessus, alors pour  $i \geq 2$ , on a

$$|b_{ii}| > \sum_{j=2, j \neq i}^n |b_{ij}|.$$

On a

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j}a_{11}}{a_{11}^2} \text{ si } j \geq 2 \text{ et } b_{i1} = a_{i1}.$$

par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=2, j \neq i} |b_{ij}| &= \sum_{j=2, j \neq i} \left| a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{1i} \right| \\ &\leq \sum_{j=2, j \neq i} |a_{ij}| + \frac{|a_{1j}| |a_{11}|}{|a_{11}|} |a_{1i}| \\ &= \sum_{j=2, j \neq i} |a_{ij}| + \frac{|a_{11}| |a_{11}|}{\sum_{j=2, j \neq i} |a_{1j}|} |a_{1j}|. \end{aligned}$$

Mais, par hypothèse, pour  $i = 1$ , on a

$$\sum_{j=2}^n |a_{1j}| < |a_{11}|,$$

donc

$$\sum_{j=2, j \neq i}^n |a_{1j}| < |a_{11}| - |a_{1i}|.$$

D'où, en remplaçant dans l'inégalité précédente

$$\begin{aligned} \sum_{j=2, j \neq i} |b_{ij}| &< \sum_{j=2, j \neq i} |a_{ij}| + |a_{1i}| - \frac{|a_{11}| |a_{11}|}{|a_{11}|} |a_{1i}| \\ &= \sum_{j=1, j \neq i} |a_{ij}| - \frac{|a_{11}| |a_{11}|}{|a_{11}|} |a_{1i}| \\ &< |a_{ii}| - \frac{|a_{11}| |a_{11}|}{|a_{11}|} |a_{1i}| \\ &\leq \left| a_{ii} - \frac{a_{11} a_{11}}{a_{11}} \right| = |b_{ii}|. \end{aligned}$$

### 3. Démontrons le résultat de Hadamard pour $n$ quelconque.

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice carrée  $n \times n$ , vérifiant pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

On veut démontrer que  $A$  est inversible.

Le résultat est vrai pour  $n = 2$ , d'après la question 1). Soit  $n$  arbitrairement fixé, supposons le résultat vrai pour  $n - 1$  et démontrons le pour  $n$ .

On a  $\det A = \det B$  où  $B$  est la matrice construite dans la question 2)

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & (b_{ij}_{(2 \leq i, j \leq n)}) & & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

Or, la matrice  $(b_{ij}_{(2 \leq i, j \leq n)})$  est une matrice carrée d'ordre  $n - 1$  qui vérifie les hypothèses de Hadamard, d'après la question 2). Elle est donc inversible par hypothèse de récurrence. Et, par conséquent, la matrice  $A$  est inversible car  $a_{11} \neq 0$ .

## Correction de l'exercice 4 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrons que  $A$  est diagonalisable et trouvons une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

Commençons par calculer le polynôme caractéristique de  $A$  :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$$

Les racines du polynôme caractéristique sont les réels 1 avec la multiplicité 2, et 2 avec la multiplicité 1.

Déterminons les sous-espaces propres associés : Soit  $E_1$  le sous-espace propre associé à la valeur propre double 1.

$$E_1 = \{V(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / A.V = V\},$$

$$V \in E_1 \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0$$

$E_1$  est donc un plan vectoriel, dont les vecteurs  $e_1 = (1, 1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1, 1)$  forment une base.

Soit  $E_2$  le sous-espace propre associé à la valeur propre simple 2.

$$E_2 = \{V(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / A.V = 2V\},$$

$$V \in E_2 \iff \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \iff x = 0, y = 0$$

$E_2$  est donc une droite vectorielle, dont le vecteur  $e_3 = (0, 0, 1)$  est une base.

Les dimensions des sous-espaces propres sont égales à la multiplicité des valeurs propres correspondantes, la matrice  $A$  est donc diagonalisable. Dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  l'endomorphisme représenté par  $A$  (dans la base canonique) a pour matrice.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie  $P^{-1}AP = D$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorisons le polynôme caractéristique de  $A$ .

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3 + (1-X) = (1-X)((1-X)^2 + 1) = (1-X)(X^2 - 2X + 2)$$

factorisons maintenant le polynôme  $X^2 - 2X + 2$ , le discriminant réduit  $\Delta' = 1 - 2 = -1$ , ce polynôme n'admet donc pas de racines réelles, mais deux racines complexes conjuguées qui sont :  $1 + i$  et  $1 - i$ . On a  $P_A(X) = (1-X)(1-i-X)(1+i-X)$ .

La matrice  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  car son polynôme caractéristique n'a pas toutes ses racines dans  $\mathbb{R}$ , elle est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  car c'est une matrice  $3 \times 3$  qui admet trois valeurs propres distinctes.

---

**Correction de l'exercice 6 ▲**

---

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Démontrons que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

Le polynôme caractéristique  $P_A(X)$  est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & c \\ c & d-X \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - c^2 = X^2 - (a+d)X + ad - c^2,$$

déterminons ses racines : calculons le discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+d)^2 - 4(ad - c^2) \\ &= a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4c^2 \\ &= a^2 + d^2 - 2ad + 4c^2 \\ &= (a-d)^2 + 4c^2 \geq 0 \end{aligned}$$

On a  $\Delta = 0 \iff a-d=0$  et  $c=0$ , mais, si  $c=0$ , la matrice  $A$  est déjà diagonale. Sinon  $\Delta > 0$  et le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

---

**Correction de l'exercice 7 ▲**

---

Soit  $A$  la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons  $A^2$  et vérifions que  $A^2 = A + 2I_3$ . On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3.$$

On a donc  $A^2 - A = 2I_3$ , c'est-à-dire  $A(A - I_3) = 2I_3$ , ou encore  $A \cdot \frac{1}{2}(A - I_3) = I_3$ . Ce qui prouve que  $A$  est inversible et que son inverse est  $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$ .

---

**Correction de l'exercice 8 ▲**

---

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . On suppose que  $A$  est inversible et que  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre de  $A$ .

1. Démontrons que  $\lambda \neq 0$ . Si  $\lambda = 0$  est valeur propre de  $A$ , alors  $\ker A \neq \{0\}$ , donc  $A$  n'est pas injective et sa matrice ne peut pas être inversible. Par conséquent,  $\lambda \neq 0$ .
2. Démontrons que si  $\vec{x}$  est un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$  alors il est vecteur propre de  $A^{-1}$  de valeur propre  $\lambda^{-1}$ .

Comme  $A$  est inversible, on a  $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}(\lambda\vec{x}) \iff \vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x}$ , d'où  $A^{-1}\vec{x} = \lambda^{-1}\vec{x}$ .  
Ce qui prouve que  $\vec{x}$  est vecteur propre de  $A^{-1}$  de valeur propre  $\lambda^{-1}$ .

---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

---

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $f^2 = \text{mathrmId}_E$ .

1. *Démontrons que les seules valeurs propres possibles de  $f$  sont 1 et  $-1$ .*

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ , il existe un vecteur non nul  $\vec{x} \in E$  tel que  $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ . On a donc

$$f^2(\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}.$$

Mais,  $f^2 = \text{mathrmId}_E$  donc si  $\vec{x}$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  on a

$$\vec{x} = f^2(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x},$$

d'où  $\lambda^2 = 1$ , c'est-à-dire (dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ),  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = -1$ . ce qui prouve que les seules valeurs propres possibles de  $f$  sont 1 et  $-1$ .

2. *Vérifions que pour tout  $\vec{x} \in E$ , on a*

$$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x})) \text{ et } f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$$

Soit  $\vec{x} \in E$ , on a

$$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = f(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x} = -(\vec{x} - f(\vec{x}))$$

et

$$f(\vec{x} + f(\vec{x})) = f(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \vec{x}$$

*Nous allons en déduire que  $f$  admet toujours une valeur propre.*

Supposons que 1 ne soit pas valeur propre de  $f$ , alors,  $\vec{x} = f(\vec{x}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ . Or, pour tout  $\vec{x} \in E$ , on a  $f(\vec{x} + f(\vec{x})) = f(\vec{x}) + \vec{x}$ , donc pour tout  $\vec{x} \in E$ , on a  $f(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$ , c'est-à-dire,  $f(\vec{x}) = -\vec{x}$ . Ce qui prouve que  $-1$  est valeur propre de  $f$ . On a même dans ce cas  $f = -\text{mathrmId}_E$ .

Si  $-1$  n'est pas valeur propre de  $f$ , on montre par un raisonnement analogue que pour tout  $\vec{x} \in E$  on a  $f(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0}$ . Ce qui prouve que 1 est valeur propre de  $f$ , et dans ce cas  $f = \text{mathrmId}_E$ .

3. *Démontrons que si 1 et  $-1$  sont valeurs propres, alors  $E$  est somme directe des sous-espaces propres correspondants.*

Supposons maintenant que 1 et  $-1$  sont valeurs propres de  $f$ . Ce sont alors les seules et on a, pour tout  $\vec{x} \in E$ ,

$$\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{x} + f(\vec{x})) + \frac{1}{2}(\vec{x} - f(\vec{x}))$$

Et, quelque soit  $\vec{x} \in E$ ,  $f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x}))$  et  $f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$ , c'est-à-dire  $\vec{x} + f(\vec{x})$  est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et  $\vec{x} - f(\vec{x})$  est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre  $-1$ . Par ailleurs on sait que les sous-espaces propres sont en somme directe (on peut le vérifier également puisque leur intersection est l'ensemble des vecteurs  $\vec{x}$  tels que  $\vec{x} = -\vec{x}$ , donc réduite au vecteur nul). par conséquent  $E$  est bien somme directe des sous-espaces propres correspondants aux valeurs propres 1 et  $-1$ .

4. *Traduisons géométriquement le cas  $n = 2$ .*

Rappelons que si il n'y a qu'une valeur propre,  $f$  est l'identité ou son opposée. Dans le cas où 1 et  $-1$  sont valeur propres, leurs sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Soit  $u$  un vecteur propre tel que  $f(u) = u$  et  $v$  un vecteur propre tel que  $f(v) = -v$ , alors si  $w = au + bv$ ,  $f(w) = au - bv$ .

### Correction de l'exercice 15 ▲

On suppose qu'une population  $x$  de lapins et une population  $y$  de loups sont gouvernées par le système suivant d'équations différentielles :

$$(S) \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

1. On diagonalise la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour cela on détermine ses valeurs propres :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Ainsi, la matrice  $A$  admet deux valeurs propres distinctes, qui sont  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 3$ . Elle est diagonalisable. Déterminons une base de vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \iff x = y,$$

d'où le vecteur propre  $u_1 = (1, 1)$  associé à la valeur propre  $\lambda_1 = 2$ .

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \iff x = 2y,$$

d'où le vecteur propre  $u_2 = (2, 1)$  associé à la valeur propre  $\lambda_2 = 3$ . Dans la base  $(u_1, u_2)$ , la matrice s'écrit

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a  $A = PA'P^{-1}$  où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Exprimons le système  $(S)$  et ses solutions dans une base de vecteurs propres de  $A$ .

Dans la base  $(u_1, u_2)$ , le système  $(S)$  devient

$$(S') \begin{cases} X' = 2X \\ Y' = 3Y \end{cases}$$

Ses solutions sont les fonctions

$$\begin{cases} X(t) = X(0)e^{2t} \\ Y(t) = Y(0)e^{3t} \end{cases}$$

3. Pour représenter graphiquement les trajectoires de  $(S)$  dans le repère  $(Oxy)$ , on trace d'abord le repère  $(O, u_1, u_2)$  dans le repère  $(Oxy)$ , puis, on trace les courbes

$$Y = \frac{Y(0)}{X(0)} X^{3/2}$$

dans le repère  $(O, u_1, u_2)$  (ou  $OXY$ ).

4. On voit sur le dessin que si  $Y(0)$  est strictement positif, alors la population des lapins,  $x(t)$  tend vers  $+\infty$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Si  $Y(0)$  est strictement négatif alors la populations des lapins s'éteint dans la mesure ou  $x(t)$  dans ce cas tendrait vers  $-\infty$ .

### Correction de l'exercice 16 ▲

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ , dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculons les valeurs propres de  $A$ .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3.$$

La matrice  $A$  admet une valeur propre triple qui est  $\lambda = 1$ , elle ne peut pas être diagonalisable sinon son sous-espace propre serait de dimension 3 or,  $A \neq I$ .

2. Calculons  $(A - I)^2$ .

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrons que  $A^n = nA + (1 - n)I$  en utilisant la formule du binôme de Newton.

$$A^n = (A - I + I)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (A - I)^k I^{n-k} = C_n^0 I^n + C_n^1 (A - I) = I + n(A - I) = nA + (1 - n)I.$$

Car, pour  $k \geq 2$ , on a  $(A - I)^k = 0$ .

3. Soient  $P(X) = (X - 1)^2$  et  $Q \in \mathbb{R}[X]$ .

Exprimons le reste de la division euclidienne de  $Q$  par  $P$  en fonction de  $Q(1)$  et  $Q'(1)$ , où  $Q'$  est le polynôme dérivé de  $Q$ .

Il existe des polynômes  $S$  et  $R$ , avec  $d^\circ R < d^\circ P$  ou  $R = 0$ , tels que

$$Q(X) = S(X)(X - 1)^2 + R(X).$$

Notons  $R(X) = aX + b$  ( $R(X)$  est de degré 1 car  $P$  est de degré 2) et dérivons, on obtient

$$Q'(X) = S'(X)(X - 1)^2 + 2(X - 1)S(X) + a,$$

on a donc  $Q(1) = R(1) = a + b$  et  $Q'(1) = a$ , c'est-à-dire  $a = Q'(1)$  et  $b = Q(1) - Q'(1)$  d'où

$$R(X) = Q'(1)X + (Q(1) - Q'(1)).$$

D'après la question 2), on remarque que  $P(A) = 0$ , en choisissant le polynôme  $Q(X) = X^n$  on a  $Q(1) = 1$  et  $Q'(1) = n$ , donc

$$Q(A) = A^n = R(A) = Q'(1)A + (Q(1) - Q'(1))I = nA + (1 - n)I.$$

4. (a) Montrons que l'image de  $\mathbb{R}^3$  par l'endomorphisme  $(A - I)$  est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

$$\forall (X, Y, Z) \in \text{Im}(A - I), \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (x + y - z) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui prouve que  $\text{Im}(A - I)$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\varepsilon_2 = (2, -1, 1)$ .

(b) Déterminons un vecteur  $\varepsilon_3$  tel que  $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ . On pose  $\varepsilon_3 = (x, y, z)$ ,

$$u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = x + 2 \\ -x + z = y - 1 \\ x + y = z + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x + y - z) = 2 \\ -1(x + y - z) = -1 \\ (x + y - z) = +1 \end{cases} \iff x + y - z = 1.$$

On prends, par exemple  $\varepsilon_3 = (1, 0, 0)$ .

Déterminons un vecteur propre  $\varepsilon_1$  de  $u$  non colinéaire à  $\varepsilon_2$ .

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x + 2y - 2z = x \\ -x + z = y \\ x + y = z \end{cases} \iff x + y - z = 0.$$

On peut prendre le vecteur  $\varepsilon_1 = (0, 1, 1)$  qui n'est pas colinéaire à  $\varepsilon_2$ .

(c) Ecrivons la matrice de  $u$  dans la base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ , ainsi que les matrices de passage.

On a  $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$  et  $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  d'où la matrice de  $u$  dans la base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage  $P$  est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et son inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Pour retrouver  $A^n$ , on écrit  $A' = I + N$ , où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et  $N^2 = 0$ . Par ailleurs, on a  $A = PA'P^{-1}$ , d'où

$$\begin{aligned} A^n &= PA'^n P^{-1} = P(I + N)^n P^{-1} = P(I + nN)P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = nA + (1-n)I. \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 17 ▲

Soient  $M$  et  $A$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $MA = AM$ . On suppose que  $M$  admet  $n$  valeurs propres distinctes.

1. Soit  $x$  un vecteur propre de  $M$  de valeur propre  $\lambda$ .

Montrons que  $MAx = \lambda Ax$ .

On a  $Mx = \lambda x$ , donc  $AMx = A\lambda x = \lambda Ax$ . Mais,  $AM = MA$ , donc  $MAx = AMx = \lambda Ax$ . Ce qui prouve que le vecteur  $Ax$  est un vecteur propre de  $M$  pour la valeur propre  $\lambda$ , et comme les valeurs propres de  $M$  sont supposées distinctes, les sous-espaces propres sont de dimension 1, donc  $Ax$  est colinéaire à  $x$ . Ainsi, il existe un réel  $\mu$  tel que  $Ax = \mu x$ , donc  $x$  est un vecteur propre de  $A$ .

2. On note maintenant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $M$  et  $\mu_1, \dots, \mu_n$  celles de  $A$ .

(a) Montrons l'égalité suivante :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Il s'agit du déterminant de Vandermonde. Notons le  $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . La démonstration se fait par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 2$ , c'est évident. Supposons le résultat vrai pour  $n - 1$ . Dans  $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , retranchons à chaque colonne  $\lambda_1$  fois la précédente (en commençant par la dernière colonne). On obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} - \lambda_1 \lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n - \lambda_1 & \lambda_n^2 - \lambda_1 \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1 \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} - \lambda_1 \lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n - \lambda_1 & \lambda_n^2 - \lambda_1 \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1 \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

On factorise alors chaque ligne par  $(\lambda_i - \lambda_1)$  et on obtient

$$\begin{aligned} V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= (\lambda_2 - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1) V(\lambda_2, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) \end{aligned}$$

car  $V(\lambda_2, \dots, \lambda_n) = \prod_{2 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$  par hypothèse de récurrence.

Ce déterminant est le déterminant du système suivant,

$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} \\ \vdots \\ \mu_n = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1} \end{cases}$$

or  $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$  puisque les  $\lambda_i$  sont supposés distincts, c'est donc un système de Cramer, il admet donc une unique solution  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ .

(b) Soient  $M'$  et  $A'$  les matrices diagonales suivantes :

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

Montrons qu'il existe des réels  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k.$$

Compte tenu des matrices  $A'$  et  $M'$  l'existence de réels tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k$$

est équivalente à l'existence d'une solution pour le système précédent, d'où le résultat.

On en déduit qu'il existe des réels  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  tels que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

La matrice  $M$  admet  $n$  vecteurs propres linéairement indépendants qui sont également vecteurs propres de la matrice  $A$ . Par conséquent il existe une même matrice de passage  $P$  telle que  $M = PM'P^{-1}$  et  $A = PA'P^{-1}$ , d'où l'égalité

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

---