Enoncés : M. Quéffelec, V. Mayer, T. Tahani, F. Sarkis
Corrections : F. Sarkis

# Théorème des accroissements finis

## Exercice 1

1. Soit $f$ une application réelle continue et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f'(x)$ ait une limite quand $x \overset{<}{\to} b$; alors $f$ se prolonge en une fonction continue et dérivable à gauche au point $b$.

2. Soit $f$ une application continue et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et de dérivée croissante; montrer que $f$ est convexe sur $I$ i.e. $f((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)f(x)+tf(y)$ pour tous $x<y$ de $I$ et $t \in [0,1]$. (Poser $z=(1-t)x+ty$ et appliquer les AF à $[x,z]$ puis $[z,y]$.)

Correction ▼ [002518]

## Exercice 2

Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas vraie pour les fonctions vectorielles en considérant $f(x)=e^{ix}$.

Correction ▼ [002519]

## Exercice 3 partiel du 5 décembre 1999

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=(x^2-y, x^2+y^2)$ et $g=f\circ f$.

1. Montrer que $f$ et $g$ sont de classe $C^1$.

2. Calculer en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne de $f$ notée $Df(x,y)$; calculer la matrice jacobienne de $g$ au point $(0,0)$ notée $Dg(0,0)$.

3. Montrer qu'il existe $\rho>0$ tel que pour tout $(x,y)\in\overline{B_\rho((0,0))}$ (la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon $\rho$) on a $||Dg(x,y)|| \leqslant \frac{1}{2}$.

4. Montrer que la fonction $g$ admet un unique point fixe dans $\overline{B_\rho((0,0))}$.

Correction ▼ [002520]

## Exercice 4

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y)=(\cos x-\sin y,\ \sin x-\cos y)$; on note $F^{(k)}$ l'application $F$ composée $k$-fois

1. Montrer que $||DF(x,y)|| \leqslant \sqrt{2}$ pour tout $(x,y)$.

2. En déduire que la suite récurrente définie par $x_0, y_0$ et pour $n\geqslant 1$

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(\cos x_n-\sin y_n), \quad y_{n+1}=\frac{1}{2}(\sin x_n-\cos y_n)$$

converge pour tout $(x_0,y_0)$. Donnez l'équation que vérifie sa limite ?

Correction ▼ [002521]

## Exercice 5

Soit $f$ une application différentiable de $]a,b[\subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$; on suppose qu'il existe $k>0$ tel que

$$||f'(x)|| \leqslant k||f(x)||, \quad \forall x \in ]a,b[.$$

Montrer que si $f$ s'annule en un point $x_0 \in ]a,b[$, $f$ est identiquement nulle dans $]a,b[$ (montrer que $E=\{x\in ]a,b[\ ;\ f(x)=0\}$ est ouvert). [002522]

### Exercice 6

Soit $E$ un espace de Banach, $U$ un ouvert de $E$ et $f$ une application différentiable de $U$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait $||f'(x)|| \leqslant k|f(x)|,\ \ \forall x \in U$. Montrer que pour $x$ assez voisin de $a \in U$,

$$|f(x)| \leqslant e^{k||x-a||}\,|f(a)|.$$

*Indication :* considérer l'application $t\in[0,1]\to f(a+t(x-a)))$. [002523]

### Exercice 7

On considère l'application $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y)=(x^2+y^2,y^2)$; on note $F^{(k)}$ l'application $F$ composée $k$-fois avec elle-même. On considère $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ \lim_{k\to\infty}F^{(k)}(x,y)=(0,0)\}$.

1. Vérifier que $(x,y)\in\Omega \Longleftrightarrow F(x,y)\in\Omega$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que $||(x,y)||<\varepsilon \Longrightarrow ||F'(x,y)|| \leqslant \frac{1}{2}$; en déduire que $0$ est intérieur à $\Omega$ puis que $\Omega$ est ouvert.
3. Montrer que $\Omega$ est connexe.

[002524]

### Exercice 8

On considère l'application $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x,y)=(x^2+y^2,y^2)\ .$$

Soit $\Omega=\{p\in\mathbb{R}^2\,;\ \lim_{k\to\infty}F^k(p)=(0,0)\}$.

1. Vérifier que $p\in\Omega$ si et seulement si $F(p)\in\Omega$.
2. Montrer qu'il existe $\delta>0$ tel que $|||DF(p)|||<\frac{1}{2}$ si $\|p\|<\delta$. En déduire que $(0,0)$ est dans l'intérieur de $\Omega$ puis que $\Omega$ est un ouvert.
3. Utiliser l'homogénéité de $F$ pour montrer que $\Omega$ est connexe.

[002525]

### Exercice 9

Soit $\Omega$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ une application de classe $C^1$ qui est injective sur $\Omega$ et telle que $Df(x)$ soit injective pour tout $x\in\Omega$. Montrer que, pour tous $a,b\in\Omega$,

$$\|f(b)-f(a)-Df(a)(b-a)\| \leqslant \|b-a\| \sup_{c\in[a,b]} \|Df(c)-Df(a)\|\ .$$

Correction ▼ [002526]

**Correction de l'exercice 1 ▲**

Montrons que $f$ se prolonge par continuité au point $b$, on montrera alors que $f$ est dérivable à gauche au point $b$ est que cette dérivée est $\lim_{x\to b^-} f'(x)$. Pour celà montrons qu'il existe un réel $k$ tel que toute suite $\{x_n\}$ tendant vers $b$ vérifie $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = k$. Remarquons que la dérivée $f'(x)$ admettant une limite au point $b$, elle est bornée sur un petit voisinage (à gauche) de $b$ (notons $M$ ce majorant). Soit $y_n$ une suite convergent vers $b$. Alors la suite $f(y_n)$ est de Cauchy. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$. La suite $\{y_n\}$ étant de cauchy,

$$\exists N \in \mathbb{N}, p,q \geqslant N \Rightarrow |y_p - y_q| \leqslant \varepsilon' \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Or d'après les accroissements finis:

$$f(y_p) - f(y_q) = (y_p - y_q) f'(c_{p,q}) \text{ où } c_{p,q} \in ]y_p, y_q[.$$

Par conséquent,

$$|f(y_p) - f(y_q)| \leqslant |y_p - y_q|.|f'(c_{p,q})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} M \leqslant \frac{epsilon}{2} < \varepsilon$$

et donc la suite $\{f(y_n)\}$ est de cauchy et converge vers un réel que nous noterons $l$. Montrons que c'est le cas pour toute autre suite $\{x_n\}$ qui tend vers $b$. On a

$$f(x_n) = f(x_n) - f(y_n) + f(y_n).$$

D'après les accroissements finis, $|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant M.|x_n - y_n|$ et donc tend vers zero car les suites $x_n$ et $y_n$ tendent vers $b$. De plus, comme on l'a vu, $f(y_n)$ tend vers $k$ et donc $f(x_n)$ aussi. Prolongeons $f$ par continuité au point $b$ en posant $f(b) = k$. On a alors le taux d'accroissement

$$T_x f = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{(b-x) f'(c_x)}{b - x} = f'(c_x) \text{ où } c_x \in ]x, b[.$$

Quand $x$ tend vers $b$, $c_x$ aussi et donc $T_x f$ tend vers $l$.

---

**Correction de l'exercice 2 ▲**

On a $f'(x) = ie^{ix}$ (on peut le vérifier en coordonnées). Si l'égalité des accroissement finis était vérifiée il existerait

$$c \in ]0, \pi[ \text{ tel que } f(\pi) - f(0) = (\pi - 0) ie^{ic}$$

ce qui est impossible car en prenant les modules on trouverait $2 = \pi$.

---

**Correction de l'exercice 3 ▲**

1. $f$ est de classe $C^\infty$ car ses coordonnées le sont (polynômes). $g$ l'est car c'est la composée de deux fonctions $C^\infty$.

2. La matrice jacobienne de $f$ est:
$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$
D'apès la formule de différentielle d'une composée, on a
$$Dg(x,y) = Df(f(x,y)) \circ Df(x,y).$$
Or $f(0,0) = 0$ et
$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et donc
$$Dg(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

3. Par continuité de $Dg(x,y)$ à l'origine et en prenant $\varepsilon = 1/2$ on a:

$$\exists \rho > 0, ||(x,y)-(0,0)|| \leqslant \rho \Rightarrow ||Dg(x,y) - Dg(0,0)|| \leqslant 1/2$$

d'où le résultat demandé.

4. D'après les accroissements finis, pour tous $X,Y \in \mathbb{R}^2$, on a

$$||g(X) - g(Y)|| \leqslant \sup_{Z \in \overline{B}_\rho((0,0))} ||Dg(Z)||.||X-Y|| \leqslant 1/2||X-Y||$$

et donc $g$ est contractante. Le Boule $\overline{B}_\rho((0,0))$ la boule $\overline{B}_\rho((0,0))$ étant compacte et complète, le théorème du point fixe permet de conclure.

---

## Correction de l'exercice 4 ▲

1. On a

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & -\cos y \\ \cos x & \sin y \end{pmatrix}$$

On a

$$|||Df(x,y)||| = \sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{||Df(x,y).(a,b)||}{||(a,b)||} =$$

$$\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 y + 2ab\sin x\cos x + a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 y + 2ab\cos x\sin y}}{\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin(x+y)}}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant \sqrt{1+\frac{2|a||b|}{a^2+b^2}} \leqslant \sqrt{2}$$

car

$$(|a|-|b|)^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geqslant 2|a||b|.$$

2. Soient $U_n = (x_n, y_n)$ et $G(x,y) = 1/2F(x,y)$, alors $|||G||| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $U_{n+1} = G(U_n)$. D'après les accroissements finis, $G$ est contractante et donc le théorème du point fixe donne le résultat demandé.

---

## Correction de l'exercice 9 ▲

Appliquer le théorème des accroissements finis à $g(x) = f(x) - Df(a)x$ en remarquant que la matrice jacobienne de $Df(a)x$ est la matrice $Df(a)$.