



Préalables, rappels

Exercice 1

1. Montrez que $d(x, y) = |x - y|$ est bien une distance sur l'ensemble des réels.
2. Pour tout couple d'éléments $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n , on définit $d(X, Y) = \sup_{i=1..n} |x_i - y_i|$. Montrez que d est bien une distance sur \mathbb{R}^n .
3. Faire de même avec $d(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$.

[002494]

Exercice 2

Décrire la boule de centre l'origine et de rayon 1 dans les espaces suivants:

1. \mathbb{R} muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$.
2. \mathbb{R}^2 muni de la distance $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.
3. \mathbb{R}^2 muni de la distance $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sup(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$.
4. \mathbb{R}^2 muni de la distance $d_3((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Montrez que les 3 dernières distances sont équivalentes.

[Correction ▼](#)

[002495]

Exercice 3

Soit E l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle $[0, 1]$ dans \mathbb{R} qui sont continues. Montrez que l'application $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$ est une norme sur E . Montrez que E n'est pas complet.

[Correction ▼](#)

[002496]

Exercice 4

Etudiez la continuité des applications suivantes:

1. $f(x) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.
2. $f(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.
3. $f(x) = \frac{\exp(\frac{-1}{x^2+y^2})}{|x|+|y|}$.

[002497]

Exercice 5

Soient E et F deux espaces normés réels et $f : E \rightarrow F$ une application bornée sur la boule unité de E et vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Montrez que f est linéaire continue.

[Correction ▼](#)

[002498]

Exercice 6

Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur \mathbb{R}^2 et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. On définit la norme de M (ou de l'application linéaire associée) de la manière suivante:

$$\|M\| = \sup_{X \in S_1(0,1)} \|M.X\|_2$$

où $S_1(0,1)$ est la sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_1$. Dans chacun des cas suivant, calculez la norme de M .

1. $\|(x,y)\|_1 = \|(x,y)\|_2 = \sup(|x|, |y|)$.
2. $\|(x,y)\|_1 = \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $\|(x,y)\|_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\|(x,y)\|_2 = \sup(|x|, |y|)$.

[Correction ▼](#)

[002499]

Exercice 7

Continuité sur \mathbb{R}^2 des fonctions suivantes:

1. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$

[002500]

Exercice 8

Calculez la norme des opérateurs suivants:

1. Le shift sur l^∞ défini par $S(x)_{n+1} = x_n, S(x)_0 = 0$ (sur l^∞ on définit $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$).
2. $X = \mathcal{C}([0,1])$ avec la norme sup et l'opérateur $Tf(x) = f(x)g(x)$ où $g \in X$.
3. $X = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme sup et $u(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ où $g \in X$ est une fonction qui s'annule qu'en $x = 1/2$.
4. $X = l^2$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans X .
5. X l'espace des suites convergentes muni de la norme sup et $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ l'application $u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j$.

[Correction ▼](#)

[002501]

Exercice 9

Soit $X = \mathcal{C}([0,1])$ avec la norme $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt$. Montrez que la forme linéaire $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(f) = f(0)$ n'est pas continue en 0. Que peut-on en déduire pour le sous-espace des fonctions de X nulles en 0 ?

[002502]

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On a par définition $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}; |x - 0| = |x| < 1\} = [-1, 1]$.
2. C'est la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 , $B_1(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$ c'est le disque de centre l'origine et de rayon 1.
3. $B_2(0, 1) = \{(x, y); |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$. C'est un carré.
4. $B_3(0, 1) = \{(x, y); |x| + |y| < 1\}$. Dans le quart de plan $P^{++} = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0\}$, on a $B_3(0, 1) \cap P^{++} = \{(x, y) \in P^{++}; x + y < 1\}$ c'est le triangle délimité par les droites $x = 0, y = 0$ et $x + y = 1$. En faisant de même pour les 3 autres secteurs du plan, on trouve que $B_3(0, 1)$ est un losange (ou carré) dont les sommets sont les points $(0, 1), (1, 0), (-1, 0), (0, -1)$.

Toutes ces distances étant invariantes par translation (ce sont des normes), il suffit de montrer que les normes associées $\|\cdot\|_i = d_i((x, y), 0)$ sont équivalentes.

On a

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_1 &= \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{\sup(x^2, y^2) + \sup(x^2, y^2)} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{\sup(x^2, y^2)} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{(\sup(|x|, |y|))^2} \leq \sqrt{2} \|(x, y)\|_2 \end{aligned}$$

. De plus,

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_1 &= \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{\sup(x^2, y^2)} \\ &\geq \sqrt{(\sup(|x|, |y|))^2} \geq \sup(|x|, |y|) \geq \|(x, y)\|_2. \end{aligned}$$

Les distances d_1 et d_2 sont donc équivalentes.

De même on montre que

$$\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_3 \leq 2\|\cdot\|_2.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Il faut trouver une suite de Cauchy de fonctions de E qui ne converge pas dans E . Il suffit, par exemple, de prendre une suite de fonctions $\{f_n\}$ convergeant pour $\|\cdot\|$ vers une fonction non continue. Par exemple, prendre

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1/2 \\ 1 - n(x - 1/2) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1/2 + 1/n \\ 0 & \text{si } x > 1/2 + 1/n \end{cases}$$

et

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1/2 \\ 0 & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

On a alors $\|f_n - f_0\|_1 = 1/(2n)$, la suite converge simplement et en norme $\|\cdot\|$ vers la fonction f_0 qui n'est pas continue. Il suffit de montrer alors qu'il n'existe aucune fonction continue g telle que $\|f - g\| = 0$ ce qui interdit l'existence d'une limite à f_n dans E .

Correction de l'exercice 5 ▲

On montre par récurrence que $f(nx) = nx$ si $n \in \mathbb{N}$. Montrer $f(-x) = -f(x)$ pour arriver à $f(nx) = nf(x)$ si $n \in \mathbb{Z}$ puis $f(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}f(x)$ $p, q \in \mathbb{Z}$. Ainsi f est linéaire sur \mathbb{Q} . Il reste à montrer qu'elle l'est sur \mathbb{R} . Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il reste à montrer que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Prenons $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$. On a alors

$$f(\lambda x) = f(\lambda_n x + (\lambda - \lambda_n)x) = \lambda_n f(x) + f((\lambda - \lambda_n)x).$$

Soit $c_n \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\|(\lambda - \lambda_n)x\|_E \leq c_n \leq 2\|(\lambda - \lambda_n)x\|_E.$$

Alors

$$f((\lambda - \lambda_n)x) = f(c_n \frac{\lambda - \lambda_n}{c_n} x) = c_n f(\frac{\lambda - \lambda_n}{c_n} x)$$

et

$$\|\frac{\lambda - \lambda_n}{c_n} x\| \leq 1.$$

L'application f étant borné sur la boule unité par une constante $M > 0$, on a

$$\|f((\lambda - \lambda_n)x)\| \leq c_n M$$

et donc

$$\|f((\lambda - \lambda_n)x)\| \leq c_n M \leq 2M\|(\lambda - \lambda_n)x\|_E$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f((\lambda - \lambda_n)x) = 0$$

, en remarquant qu'on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n f(x) = \lambda f(x)$$

on obtient

$$f(\lambda x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lambda_n f(x) + f((\lambda - \lambda_n)x)] = \lambda f(x).$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $X = (x, y)$, on a $M.X = (ax + by, cx + dy)$ or

$$|ax + by| \leq |ax| + |by| \leq (|a| + |b|) \sup(|x|, |y|) \leq (|a| + |b|) \|(x, y)\|_1.$$

de même,

$$|cx + dy| \leq (|c| + |d|) \|(x, y)\|_1.$$

Par conséquent

$$\|M.X\|_2 \leq \sup(|a| + |b|, |c| + |d|) \|(x, y)\|_1$$

et donc

$$\|M\| \leq \sup(|a| + |b|, |c| + |d|).$$

Supposons $|a| + |b| \geq |c| + |d|$ (inverser l'ordre sinon) et prenons $X_0 = (a/|a|, b/|b|)$ (on suppose $a \neq 0$ et $b \neq 0$ sinon vérification facile). On a alors $\|X_0\|_1 = 1$ et

$$\|M.X_0\|_2 = \sup(|a| + |b|, |ca/|a| + db/|b||) \geq |a| + |b|.1 \geq (|a| + |b|) \|X_0\|_1$$

et donc

$$\|M\| \geq \sup(|a| + |b|, |c| + |d|)$$

et finalement

$$\|M\| = \sup(|a| + |b|, |c| + |d|)$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Soit x une suite, on a

$$\|S(x)\|_\infty = \text{Max}(\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_{n-1}|, 0) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = 1 \cdot \|x\|_\infty.$$

Donc $\|S\| = 1$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} f(x)g(x) \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Donc

$$\|T\| \leq \|g\|_\infty.$$

Or

$$\|T1\|_\infty = \|g\|_\infty = \|1\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Donc

$$\|T\| \geq \|g\|_\infty$$

et finalement on a bien

$$\|T\| = \|g\|_\infty.$$

3. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, on a

$$\|u(f)\| = \left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)||g(x)|dx \leq \sup_{x \in [0, 1]} |g(x)| \int_0^1 |f(x)|dx \leq \|g\|_\infty \cdot \|f\|.$$

On a donc

$$\|u\| \leq \|g\|_\infty.$$

Comme g ne s'annule qu'au point $x = 1/2$, elle ne change de signe qu'une seule fois. Soit

$$f_0 = g/|g|,$$

cette fonction n'est pas continue (ni définie) en $x = 1/2$ mais vérifie $f_0 g = |g|$. Prenons $f_n = g/|g|$ si $|x - 1/2| > 1/n$, pour $|x - 1/2| \leq 1/n$, on relie les deux segments du graphe par une ligne. Alors $1 - 1/(2n) \leq \|f_n\| \leq 1$ et

$$\begin{aligned} \|u(f_n)\| &= \left| \int_{|x-1/2| > 1/n} f_n(x)g(x)dx + \int_{|x-1/2| \leq 1/n} f_n(x)g(x)dx \right| \geq \\ &= \left| \int_{|x-1/2| > 1/n} f_n(x)g(x)dx - \int_{|x-1/2| \leq 1/n} f_n(x)g(x)dx \right| \\ &\geq \|g\|_\infty \int_{|x-1/2| > 1/n} |f_n(x)|dx - 2/n \|g\|_\infty \geq \|g\|_\infty (\|f_n\| - 2/n). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u(\frac{f_n}{\|f_n\|})\| \geq \|g\|_\infty (1 - \frac{1}{2n\|f_n\|}) \geq \|g\|_\infty (1 - \frac{1}{2n(1 - 1/2n)}) \geq \|g\|_\infty (1 - \frac{1}{2n-1})$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|u\| \geq \|g\|_\infty (1 - \frac{1}{2n-1}),$$

en faisant tend n vers l'infini

$$\|u\| \geq \|g\|_\infty$$

ce qui montre la deuxième inégalité et on obtient $\|u\| = \|g\|_\infty$.

4. si on prend $(x_n) = (a_n)$ on obtient

$$u((a_n)) = \sum a_n^2 = \|(a_n)\|_2^2 = \|(a_n)\|_2 \cdot \|(a_n)\|_2$$

et donc

$$\|u\| \geq \|(a_n)\|_2.$$

Or D'après Cauchy-Schwartz, on a

$$\|u(a_n)\| = |u(a_n)| = \left| \sum a_n x_n \right| \leq \|(a_n)\|_2 \|(x_n)\|_2$$

et donc $\|u\| \leq \|(a_n)\|_2$ d'où l'égalité

$$\|u\| = \|(a_n)\|_2.$$

5. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a $|x_j| \leq \|(x_n)\|_\infty$ et par conséquent

$$|u((x_n))| = \left| \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \right| \leq \|(x_n)\|_\infty$$

et donc

$$\|u\| \leq 1.$$

Prenons la suite (x^0) définie par $x_n^0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors

$$|u(x^0)| = \left| \lim_{j \rightarrow \infty} 1 \right| = 1 = \|(x^0)\|_\infty$$

et donc

$$\|u\| \geq 1$$

d'où l'égalité $\|u\| = 1$.
