



Méthodes itératives

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour qu'elles valeurs de a A est-elle définie positive?
2. Pour qu'elles valeurs de a la méthode de Gauss-Seidel est-elle convergente?
3. Ecrire la matrice J de l'itération de Jacobi.
4. Pour qu'elles valeurs de a la méthode de Jacobi converge-t-elle?
5. Ecrire la matrice \mathcal{L}_1 de l'itération de Gauss-Seidel. Calculer $\rho(\mathcal{L}_1)$.
6. Pour quelles valeurs de a la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle plus vite que celle de Jacobi?

[002235]

Exercice 2

Soit A une matrice hermitienne inversible décomposée en $A = M - N$ où M est inversible. Soit $B = I - M^{-1}A$ la matrice de l'itération:

$$x_{n+1} = Bx_n + c.$$

Supposons que $M + M^* - A$ soit définie positive.

1. Soit x un vecteur quelconque et on pose $y = Bx$. Montrer l'identité:

$$(x, Ax) - (y, Ay) = ((x - y), (M + M^* - A)(x - y)).$$

2. Supposons que A est définie positive. Soit $x \neq 0$ un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ , $y = Bx = \lambda x$. Utiliser l'identité précédente pour montrer que $|\lambda| < 1$. Que peut-on conclure sur la convergence de la méthode?
3. Supposons maintenant que $\rho(B) < 1$. montrer que A est définie positive.
4. Supposons A décomposée par points ou par blocs sous la forme

$$A = D - E - F \text{ avec } D \text{ définie positive.}$$

Montrer que la méthode de relaxation par points ou par blocs pour $0 < w < 2$ converge si et seulement si A est définie positive.

Correction ▼

[002236]

Exercice 3

Soit $A = I - E - E^*$ une matrice carrée d'ordre N où E est une matrice strictement triangulaire inférieure ($e_{ij} = 0$ pour $i \leq j$). Pour résoudre le système $Ax = b$, on propose la méthode itérative définie par

$$\begin{cases} (I - E)x_{2k+1} & = E^*x_{2k} + b \\ (I - E^*)x_{2k+2} & = Ex_{2k+1} + b \end{cases}$$

1. Déterminer B et c pour que l'on ait:

$$x_{2k+2} = Bx_{2k} + c.$$

Vérifier que $B = M^{-1}N$ et $A = M - N$ avec $M = (I - E)(I - E^*)$, $N = EE^*$.

2. Montrer que $M^* + N$ est une matrice définie positive. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la méthode.

Correction ▼

[002237]

Exercice 4

Soient A et B deux matrices réelles d'ordre N et a, b deux vecteurs de \mathbb{R}^n . On considère les deux itérations suivantes:

$$\begin{cases} x_{k+1} = By_k + a \\ y_{k+1} = Ax_k + b \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ donnés.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante de convergence des deux suites de vecteurs.

2. Soit $z_k = (x_k, y_k)^T \in \mathbb{R}^{2n}$. Montrer que (1) peut s'écrire

$$z_{k+1} = Cz_k + c$$

où C est une matrice d'ordre $2n$. Expliciter C et c .

3. Montrer que $\rho^2(C) = \rho(AB)$.

4. On considère maintenant les deux itérations suivantes:

$$\begin{cases} x_{k+1} = By_k + a \\ y_{k+1} = Ax_{k+1} + b \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence.

Montrer que (2) est équivalent à

$$z_{k+1} = Dz_k + d$$

où D est une matrice d'ordre $2N$.

Montrer que $\rho(D) = \rho(AB)$.

5. Taux de convergence

On appelle taux de convergence asymptotique de la matrice itérative M le nombre

$$R(M) = -\ln(\rho(M)).$$

On pose $e^k = x^k - x^*$ l'erreur de l'itéré d'ordre k .

(a) Montrer que le nombre d'itérations k pour réduire l'erreur d'un facteur ε , i.e., $\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leq \varepsilon$ vérifie

$$k \geq \frac{-\ln \varepsilon}{R(M)}.$$

(b) Comparer le taux de convergence des algorithmes (1) et (2).

Correction ▼

[002238]

Exercice 5

On considère le système $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

1. Décomposer A sous la forme LU et en déduire que (3) admet une solution unique x^* .
2. Ecrire l'itération de Gauss–Seidel pour ce système, c'est-à-dire, le système linéaire donnant $X_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, t_{n+1}, u_{n+1})$ en fonction de $X_n = (x_n, y_n, z_n, t_n, u_n)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $e_n = X_n - x^*$. Montrer qu'il existe $a \in [0, 1[$ tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|e_{n+1}\|_\infty \leq a \|e_n\|_\infty.$$

En déduire la convergence de la suite.

4. Déterminer la matrice de Gauss–Seidel \mathcal{L}_1 associée à A . Calculer $\|\mathcal{L}_1\|_\infty$. En déduire la convergence de (X_n) vers x^* .
5. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant la propriété suivante:

$$\begin{aligned} |a_{ij}| &\geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad i = 2, \dots, n \\ |a_{11}| &> \sum_{j \neq 1} |a_{1j}| \end{aligned}$$

et sur chaque ligne de A il existe un terme non nul a_{ij} pour $i \geq 2$ et $j < i$.

Montrer qu'alors la méthode de Gauss–Seidel converge.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Pour le membre de gauche on obtient

$$(x, Ax) - (y, Ay) = (x, AM^{-1}Mx) + (M^{-1}Ax, Ax) - (M^{-1}Ax, AM^{-1}Ax)$$

Pour le membre de droite on obtient $y = Bx = x - M^{-1}Ax \Rightarrow x - y = M^{-1}Ax$ et donc

$$(x - y, (M + M^* - A)(x - y)) = (M^{-1}Ax, (M + M^* - A)M^{-1}Ax) = \\ (M^{-1}Ax, Ax) + (M^{-1}Ax, M^*M^{-1}Ax) - (M^{-1}Ax, AM^{-1}Ax)$$

Mais

$$(M^{-1}Ax, M^*M^{-1}Ax) = (x, (M^{-1}A)^*M^*M^{-1}Ax) = (x, AM^{-1}Ax)$$

ce qui fini la démonstration.

2. $y = Bx = \lambda x \Rightarrow x - y = (1 - \lambda)x$. En utilisant l'égalité précédente

$$(x, Ax) - (y, Ay) = (x, Ax) - (\lambda x, A(\lambda x)) = (1 - |\lambda|^2)(x, Ax)$$

$$(x - y, (M + M^* - A)(x - y)) = ((1 - \lambda)x, (M + M^* - A)((1 - \lambda)x)) = |1 - \lambda|^2(x, (M + M^* - A)x)$$

et donc

$$(1 - |\lambda|^2)(x, Ax) = |1 - \lambda|^2(x, (M + M^* - A)x)$$

λ ne peut pas être $= 1$ car sinon $y = Bx = x \Leftrightarrow x - M^{-1}Ax = x \Leftrightarrow M^{-1}Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Donc $\lambda \neq 1$, $M + M^* - A$ définie positive, $|1 - \lambda|^2 > 0$, A définie positive impliquent que $1 - |\lambda|^2 > 0 \Leftrightarrow |\lambda| < 1$. Donc $\rho(B) < 1$ et la méthode itérative converge.

3. Démonstration par absurde. Supposons que ce n'est pas vrai: $\exists x_0 \neq 0 \quad \alpha_0 = (x_0, Ax_0) \leq 0$. Alors la suite $x_n = Bx_{n-1} = B^n x_0$ tend vers 0 et $\lim \alpha_n = \lim (x_n, Ax_n) = 0$

On utilise maintenant la relation de la question 1 avec $x = x_{n-1}$ et $y = Bx_{n-1} = x_n$ et on obtient

$$\alpha_{n-1} - \alpha_n = (x_{n-1} - x_n, (M + M^* - A)(x_{n-1} - x_n)) > 0$$

si $x_{n-1} - x_n \neq 0$ (ce qui est vrai car sinon $x_{n-1} = x_n = Bx_{n-1}$ et B a une valeur propre $= 1$)

Donc $(\alpha_{n-1} - \alpha_n)$ est une suite strictement décroissante convergeant vers 0 avec $\alpha_0 < 0$. Ceci est impossible et donc A est définie positive

4. Soit $A = D - E - F$ la décomposition usuelle de A . Comme A est hermitienne, $D = D^*$ et $F = E^*$. Pour la méthode de relaxation on a $M = D/w - E$ et donc

$$M^* + M - A = D/w - F + D/w - E - D + E + F = \frac{2-w}{w}D$$

qui est hermitienne. Pour $0 < w < 2$, $M^* + M - A$ est définie positive, alors des deux questions précédentes on conclut que la méthode converge ssi A est définie positive.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. On a $x_{2k+1} = (I - E)^{-1}E^*x_{2k} + (I - E)^{-1}b$ et donc

$$x_{2k+2} = (I - E^*)^{-1}E(I - E)^{-1}E^*x_{2k} + (I - E^*)^{-1}E(I - E)^{-1}b + (I - E^*)^{-1}b$$

Mais $E(I - E)^{-1} = (I - E)^{-1}E$ et alors

$$x_{2k+2} = (I - E^*)^{-1}(I - E)^{-1}EE^*x_{2k} + (I - E^*)^{-1}(I - E)^{-1}(E + I - E)b = M^{-1}Nx_{2k} + M^{-1}b$$

avec

$$M = (I - E)(I - E^*), \quad N = EE^*, \quad M - N = I - E - E^* = A$$

2. $M^* + N = I - E - E^* + 2EE^*$ et donc

$$v^*(M^* + N)v = \|v\|_2^2 - v^*Ev - v^*E^*v + 2v^*EE^*v = \|E^*v\|_2^2 + (\|v\|_2^2 + \|E^*v\|_2^2 - 2\operatorname{Re}(v, E^*v))$$

On a l'inégalité

$$-2\|v\|\|E^*v\| \leq -2|(v, E^*v)| \leq -2|\operatorname{Re}(v, E^*v)|$$

et donc

$$(\|v\|_2 - \|E^*v\|_2)^2 \leq \|v\|_2^2 + \|E^*v\|_2^2 - 2\operatorname{Re}(v, E^*v) \Rightarrow$$

$v^*(M^* + N)v \geq \|E^*v\|_2^2 + (\|v\|_2 - \|E^*v\|_2)^2$ implique que

$$v^*(M^* + N)v = 0 \Leftrightarrow \|E^*v\|_2 = 0 \text{ et } \|v\|_2 = \|E^*v\|_2 \Leftrightarrow \|v\|_2 = 0$$

Donc $M^* + N$ est définie positive et en appliquant un résultat d'un exercice précédent on conclut que la méthode converge ssi A est définie positive.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. C'est facile à voir que si (x_k) converge vers x^* et (y_k) converge vers y^* , alors x^* et y^* sont solution des systèmes $(I - BA)x^* = Bb + a$ et $(I - AB)y^* = Aa + b$. On a:

$$\begin{cases} x_{k+1} = B(Ax_{k-1} + b) + a = BAx_{k-1} + Bb + a \\ y_{k+1} = A(By_{k-1} + a) + b = AB y_{k-1} + Aa + b \end{cases}$$

et donc (x_k) converge ssi $\rho(BA) < 1$ et (y_k) converge ssi $\rho(AB) < 1$.

2. $z_{k+1} = Cz_k + c$ avec $C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

3. Soit λ valeur propre non nulle de C et $z = (x, y)^T$ vecteur propre associé

$$Cz = \lambda z \Leftrightarrow \begin{cases} By = \lambda x \\ Ax = \lambda y \end{cases} \Rightarrow AB y = \lambda Ax = \lambda^2 y \Rightarrow$$

λ^2 est valeur propre de AB .

Soit maintenant α valeur propre de $AB \Leftrightarrow \exists u \neq 0 : ABu = \alpha u$. On pose $\beta^2 = \alpha$ et $x = Bu, y = \beta u$

$$C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta Bu \\ ABu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta Bu \\ \beta^2 u \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et donc $\rho^2(C) = \rho(AB)$

4. $D = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} a \\ Aa + b \end{pmatrix}$. La démonstration de $\rho(D) = \rho(AB)$ se fait comme dans la question précédente.

5. (a) $e^k = M^k e^0 \Rightarrow \frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leq \|M^k\| \leq \varepsilon$. Il suffit donc d'avoir $\|M^k\|^{1/k} \leq \varepsilon^{1/k} \Rightarrow \log(\|M^k\|^{1/k}) \leq \frac{1}{k} \log \varepsilon$
c'est-à-dire $k \geq \frac{\log \varepsilon}{\log(\|M^k\|^{1/k})}$ Mais comme $\rho(M) \leq \|M^k\|^{1/k}$ on obtient finalement

$$k \geq -\log \varepsilon / R(M)$$

(b) nous avons $\rho^2(C) = \rho(AB) \Rightarrow \rho(C) = \sqrt{\rho(AB)}$ et $\rho(D) = \rho(AB)$. Donc $\rho(D) < \rho(C) \Rightarrow R(D) > R(C)$. Donc on atteint la même réduction d'erreur avec un plus petit nombre d'itérations de la méthode 2)

Correction de l'exercice 5 ▲

1.

2. Itération de Gauss-Seidel : $(D - E)X_{n+1} = FX_n + b$ avec

$$D - E = \begin{pmatrix} 3 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ 0 & 2 & 3 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \end{pmatrix}, -F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & 3 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3. $e_n = X_n - X^*$, $X_{n+1} = (D - E)^{-1}FX_n + (D - E)^{-1}b$, $X^* = (D - E)^{-1}FX^* + (D - E)^{-1}b \Rightarrow e_{n+1} = (D - E)^{-1}Fe_n$

On obtient alors $(D - E)e_{n+1} = (D - E)^{-1}Fe_n$ et si on écrit composante à composante on obtient

$$3e_{n+1}^1 = -e_n^2 \Rightarrow |e_{n+1}^1| \leq \frac{1}{3}\|e_n\|_\infty$$

$$e_{n+1}^1 + 2e_{n+1}^2 = -e_n^3 \Rightarrow |e_{n+1}^2| \leq \frac{1}{6}\|e_n\|_\infty + \frac{1}{2}\|e_n\|_\infty = \frac{2}{3}\|e_n\|_\infty$$

$$2e_{n+1}^2 + 3e_{n+1}^3 = -e_n^4 \Rightarrow |e_{n+1}^3| \leq \frac{2}{3}\|e_n\|_\infty + \frac{1}{3}\|e_n\|_\infty = \frac{7}{9}\|e_n\|_\infty$$

$$e_{n+1}^3 + 32e_{n+1}^4 = -3e_n^5 \Rightarrow |e_{n+1}^4| \leq \frac{1}{4}\|e_n\|_\infty + \frac{3}{4}\|e_n\|_\infty = \frac{34}{16}\|e_n\|_\infty$$

$$e_{n+1}^4 + e_{n+1}^5 = 0 \Rightarrow |e_{n+1}^5| \leq \frac{17}{18}\|e_n\|_\infty$$

et donc

$$\|e_{n+1}\|_\infty \leq \frac{17}{18}\|e_n\|_\infty$$

4.

$$(D - E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = (D - E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

et donc $\|L_1\|_\infty = \max(\frac{1}{3}, \frac{4}{6}, \frac{17}{18}, \frac{32}{36}, \frac{32}{36}) = \frac{17}{18}$.

On en déduit donc la convergence de (X_n) vers X^* .