

Décomposition en valeurs singulières. Conditionnement

Exercice 1

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang $r \leqslant p = \min(m, n)$. On considère la décomposition en valeurs singulières de A

$$U^T AV = \operatorname{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$$

où les σ_i sont les valeurs singulières de A

- 1. Montrer que $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{span}\{u^1, u^2, \dots, u^r\}$ et $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{span}\{v^{r+1}, \dots, v^n\}$.
- 2. Montrer que $\operatorname{Im}(^T A) = \operatorname{span}\{v^1, u^2, \dots, v^r\}$ et $\operatorname{Ker}(A^T) = \operatorname{span}\{u^{r+1}, \dots, u^m\}$.
- 3. Déterminer les matrices des projections orthogonales sur Im(A), Ker(A), $Im(A^T)$, $Ker(A^T)$ à l'aide de U et V.
- 4. Application: calculer la décomposition en valeurs singulières de la matrice

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 2 & 1\\ -1 & 1 \end{array}\right)$$

et les matrices correspondantes aux projections orthogonales de l'exercice précédent.

Correction ▼ [002216]

Exercice 2 Pseudo-inverse d'une matrice

Définition: Soit Σ une matrice diagonale de type $(m \times n)$:

On appelle pseudo-inverse de Σ la matrice Σ^\dagger de type $(n \times m)$ définie par

$$\Sigma^\dagger = \left(egin{array}{ccc} \mu_1^{-1} & & 0 & \ & \ddots & & igcip \ 0 & & \mu_r^{-1} \end{array}
ight)$$

Soit *A* une matrice de type $(m \times n)$ dont la décomposition en valeurs singulières est $A = U\Sigma V^*$. On appelle *pseudo-inverse* de la matrice *A* la matrice A^{\dagger} de type $(n \times m)$ définie par

$$A^{\dagger} = V \Sigma^{\dagger} U^*$$
.

- 1. Quelle application représente la restriction de $\Sigma^{\dagger}\Sigma$ au sous-espace span $\{e_1, \dots, e_r\}$?
- 2. Montrer que si A est carrée régulière alors $A^{\dagger} = A^{-1}$.

3. Montrer que

$$A^{\dagger} = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i} v_i u_i^*.$$

- 4. Montrer que
 - AA^{\dagger} est la matrice de la projection orthogonale sur Im(A);
 - $A^{\dagger}A$ est la matrice de la projection orthogonale sur $Im(A^*)$
- 5. Montrer que la restriction à $\operatorname{Im}(A^*) = \operatorname{Ker}(A)^{\perp}$ de A^*A est une matrice inversible et

$$(A^*A)^{-1} = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-2} \nu_i \nu_i^*.$$

Correction ▼ [002217]

Exercice 3

Montrer que, pour $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$

- 1. $||A||_2 = \sigma_1$, la plus grande valeur singulière de A
- 2. $||A||_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2}$ où les σ_i sont les valeurs singulières de A.
- 3. Les valeurs singulières non nulles de A sont les racines carrés des valeurs propres non nulles de A^*A et AA^* .
- 4. pour $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $|\det(A)| = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i$.
- 5. Si $A = A^*$ alors les valeurs singulières de A sont les valeurs absolues des valeurs propres de A

Correction ▼ [002218]

Exercice 4

Montrer que

- 1. $\operatorname{cond}_2(A) = \mu_n(A)/\mu_1(A)$ avec $\mu_n(A)$ et $\mu_1(A)$ respectivement la plus grande et la plus petite valeur singulière de A;
- 2. si *A* est normale alors

$$\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|};$$

3. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonale alors

$$\operatorname{cond}_2(A) = \operatorname{cond}_2(AQ) = \operatorname{cond}_2(QA)$$

Correction ▼ [002219]

Exercice 5

$$Soit A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{array}\right)$$

- 1. Calculer $cond_2(A)$, $cond_1(A)$ et $cond_{\infty}(A)$;
- 2. Résoudre:

•
$$Ax = b$$
 pour $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$

•
$$Ay = b + \delta b$$
 pour $\delta b = \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Az = b + \Delta b$ pour $\Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$

3. Pour chacune des trois normes considérées, trouver une majoration théorique de

$$\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \text{ et } \frac{\|z-x\|}{\|x\|}$$

et comparer avec les valeurs exactes. Quelle conclusion?

[002220]

Exercice 6 Conditionnement du problème de l'inversion d'une matrice

Soit A une matrice inversible donnée.

1. si $(A + \delta A)$ est une matrice inversible, démontrer

$$\frac{\|(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A + \delta A)^{-1}\|} \leqslant \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

2. Démontrer que

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1}-A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}\leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}(1+\mathscr{O}(\|A\|))$$

Correction ▼ [002221]

Correction de l'exercice 1

4.On calcule

$$A^T A = \left(\begin{array}{cc} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{array}\right)$$

et ses valeurs propres

$$\det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 7 = \mu_1^2, \lambda_2 = 2 = \mu_2^2$$

On calcule ensuite les vecteurs propres associés à ces valeurs propres

$$\left(\begin{array}{cc} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right) = \lambda \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right)$$

et la matrice V est la matrice dont les colonnes sont

$$v_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T, \quad v_2 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})^T$$

les colonnes de U sont alors données par

$$u_1 = Av_1/\mu_1 = 1/(\sqrt{7}\sqrt{5})(3,5,-1)^T$$
, $u_2 = Av_2/\mu_2 = 1/(\sqrt{2}\sqrt{5})(-1,0,-3)^T$

quant à u_3 il est choisi orthogonal à u_1 et u_2 et de norme 1.

Correction de l'exercice 2

- 1. $\Sigma^{\dagger}\Sigma e_i = e_i, i = 1, \dots, r$ c'est l'application identité
- 2. $AA^{\dagger} = U\Sigma V^*V\Sigma^{\dagger}U = U\Sigma\Sigma^{\dagger}U^* = I$

On a donc obtenu une généralisation de l'inverse.

3. $U^*\sum_{i=1}^m \varepsilon_i u_i^*$ avec $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ base canonique de \mathbb{R}^m . Comme $\Sigma^{\dagger} \varepsilon_i = 0$ pour $r+1 \leqslant i \leqslant m$ on a

$$\Sigma^{\dagger}U^{*} = \sum_{i=1}^{r} \mu_{i}^{-1} e_{i} u_{i}^{*} \Rightarrow A^{\dagger} = V \Sigma^{\dagger} U^{*} = \sum_{i=1}^{r} \mu_{i}^{-1} (V e_{i}) u_{i}^{*} = \sum_{i=1}^{r} \mu_{i}^{-1} v_{i} u_{i}^{*}$$

4. On a

$$AA^{\dagger} = \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} u_{i} v_{i}^{*} \sum_{j=1}^{r} \mu_{j}^{-1} v_{j} u_{j}^{*} = \sum_{j=1}^{r} \mu_{j} \mu_{j}^{-1} u_{j} u_{j}^{*}$$

Comme $Im(A) = span\{u_1, \dots, u_r\}$ le résultat suit.

5. soit $y \in \text{Im}A^* \Leftrightarrow u = \sum_{i=1}^r x_i v_i$. Alors

$$A^*A = V\Sigma^*U^*U\Sigma V^* = V\Sigma^*\Sigma V^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^2 v_i v_i^* \Rightarrow A^*Ay = \sum_{i=1}^r \mu_i^2 x_i v_i$$

et finalement

$$(\sum_{i=1}^{r} \mu_i^{-2} \nu_i \nu_i^*)(A^* A y) = \sum_{i=1}^{r} x_i \nu_i$$

Correction de l'exercice 3 A

- 1. $||A||_2 = ||U\Sigma V^*||_2 = ||\Sigma||_2 = \max |\sigma_i| = \sigma_1$
- 2. $||A||_F^2 = \operatorname{tr}(A^*A) = \operatorname{tr}(U^*A^*AU) = ||AU||_F^2 = \operatorname{tr}(A^*U^*UA) = ||UA||_F^2$ et donc

$$||A||_F = ||U\Sigma V^*||_F = ||\Sigma||_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2}$$

- 3. $A^*A = (V\Sigma^*U^*)(U\Sigma V^*) = V(\Sigma^*\Sigma)V^*$ et donc A^*A est semblable à $\Sigma^*\Sigma$, les deux matrices ont donc les mêmes valeurs propres. Les valeurs propres de $\Sigma^*\Sigma$ sont $\sigma_1^2, \cdots, \sigma_r^2$ plus n-r valeurs propres nulles si n > r.
- 4. $|\det A| = |\det(U\Sigma V^*)| = |\det U|\det |\Sigma| |\det V^*| = |\det \Sigma| = \prod_{i=1}^r \sigma_i$
- 5. Une matrice hermitienne étant diagonalisable a une base orthonormale de vecteurs propres

$$A = Q\Lambda Q^* = Q|\Lambda|\operatorname{sign}(\Lambda)Q^*$$

or $U = \operatorname{sign}(\Lambda)Q^*$ est une matrice unitaire: $U^*U = Q\operatorname{sign}(\Lambda)\operatorname{sign}(\Lambda)Q^* = QQ^* = I$. Donc $Q|\Lambda|U$ est une décomposition en valeurs singulières de A, les valeurs singulières étant $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|$.

Correction de l'exercice 4 A

1. $||A||_2^2 = \rho(A^*A) = \max_i \lambda_i(A^*A) = \mu_1^2(A)$ la plus grande valeur singulière de A $||A^{-1}||_2^2 = \rho(A^{-1}(A^{-1})^*) = \max_i \lambda_i((A^*A)^{-1}) = \frac{1}{\mu_n(A)^2}$ avec $\mu_n(A)$ la plus petite valeur singulière de A. Donc

$$\operatorname{cond}_2(A) = ||A||_2 ||A^{-1}||_2 = \mu_n(A)/\mu_1(A)$$

2. Si *A* est normale alors $||A||_2 = \rho(A)$ rayon spectral. Donc

$$A^{-1} = UD^{-1}U^* \Rightarrow (A^{-1})^*A^{-1} = U(D^{-1})^*D^{-1}U^* \Rightarrow \rho((A^{-1})^*A^{-1}) = 1/\min_i |\lambda_i(A)|^2$$

$$\operatorname{cond}_2(A) = \max_i |\lambda_i(A)| / \min_i |\lambda_i(A)|$$

3.
$$\operatorname{cond}_2(QA) = \|QA\|_2 \|A^{-1}Q^*\|_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \operatorname{cond}_2(A)$$
.

Correction de l'exercice 6 ▲

$$\overline{B = A + \delta A} = A(I + A^{-1}\delta A) \text{ matrice inversible si } ||A^{-1}\delta A|| < 1$$

$$B^{-1} - A^{-1} = A^{-1}(A - B)B^{-1} \Rightarrow ||B^{-1} - A^{-1}|| \le ||A^{-1}|| ||A - B|| ||B^{-1}|| \Rightarrow$$

$$\frac{||B^{-1} - A^{-1}||}{||B^{-1}||} \le ||A^{-1}|| ||A - B|| = ||A^{-1}|| ||\delta A|| = \operatorname{cond}(A) \frac{||\delta A||}{||A||}$$