



## Quelques compléments d'algèbre matricielle

---

### Exercice 1 Matrices triangulaires élémentaires

---

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on définit les matrices suivantes dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ :

- $E_{ij}$  matrice avec un 1 dans la position  $(i, j)$  et 0 partout ailleurs;
- $V_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}, i > j$ ;
- $L(l_i) = I + l_i e_i^T$ ,  $l_i \in \mathbb{R}^n$  tel que ses premières  $i$  composantes sont nulles.

1. Quels sont les résultats des opérations suivantes sur la matrice  $A$ :

$$B = V_{ij}(\lambda)A, C = AV_{ij}(\lambda)?$$

2. Quelle est la forme de la matrice

$$V_{ij}(\lambda)V_{kj}(\lambda'), k > i?$$

3. Représenter  $L(l_i)$  et montrer que  $L(l_i)^{-1} = L(-l_i)$ .

4. Décomposer  $L(l_i)$  comme produit de matrices de la forme  $V_{km}(\lambda)$ .

5. Calculer  $L = \prod_{i=1}^{n-1} L(l_i)$  et son inverse  $L^{-1}$

6. On suppose les  $l_i$  stockés dans un tableau bidimensionnel  $Z$  et  $b \in \mathbb{R}^n$  stocké dans un tableau unidimensionnel  $B$ . Donner un algorithme permettant de calculer dans  $B$  la solution de  $Lx = b$ :

- (a) en utilisant l'expression de  $L^{-1}$ ;
- (b) en résolvant le système triangulaire.

Quelle est la conclusion?

[Correction ▼](#)

[002210]

### Exercice 2 Quelques identités pour le calcul d'inverses

---

Démontrer l'identité

$$(A + UBV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I + BVA^{-1}U)^{-1}BVA^{-1}$$

en précisant:

- son domaine de validité;
- les types des matrices  $A, U, B, V$ .

Quelques cas particuliers:

1. Supposons  $B = \beta$  scalaire,  $U = u \in \mathbb{R}^n$ ,  $V = v^T \in \mathbb{R}^n$ . Retrouver la formule de Sherman–Morrison qui permet le calcul de l'inverse d'une matrice qui apparait comme perturbation de rang 1 d'une matrice dont on connaît l'inverse.

2. Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  régulière et  $u, v \in \mathbb{R}^n$  tels que  $1 + v^T A^{-1} u = 0$ . Montrer que

$$B = \begin{pmatrix} A + uv^T & u \\ v^T & 0 \end{pmatrix} \text{ est régulière.}$$

Calculer  $B^{-1}$  en remarquant que

$$B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^T & 1 \end{bmatrix}$$

3. Soit

$$D = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \text{ matrice inversible avec } P \in \mathbb{R}^{p \times p}, Q \in \mathbb{R}^{p \times q}, S \in \mathbb{R}^{q \times q}$$

Calculer  $D^{-1}$  en remarquant que

$$D = \begin{bmatrix} P & 0 \\ R & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q \\ S - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

4. Calcul récursif de l'inverse: on pose

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & v \\ u^T & s \end{bmatrix} \text{ avec } A_{n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, u, v \in \mathbb{R}^{n-1}, s \in \mathbb{R}$$

Utiliser la formule précédente pour calculer  $A_n^{-1}$  en fonction de  $A_{n-1}^{-1}$ . En déduire un algorithme récursif pour le calcul de l'inverse d'une matrice carrée de taille  $n$ .

Correction ▼

[002211]

### Exercice 3 Quelques propriétés des normes matricielles

1. Soit  $A$  une matrice d'ordre  $(m, n)$ . Démontrer les inégalités suivantes pour les normes  $p$ ,  $p = 1, 2, \infty$  et la norme de Frobenius:

- (a)  $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$
- (b)  $\max |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn} \max |a_{ij}|$
- (c)  $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$
- (d)  $\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$

2. Soit  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$  et  $E = uv^T$ . Montrer que

$$\|E\|_F = \|E\|_2 = \|u\|_2 \|v\|_2$$

$$\|E\|_\infty = \|u\|_\infty \|v\|_1$$

Correction ▼

[002212]

### Exercice 4

Montrer que si  $\rho(A) < 1$  alors

- $I - A$  est régulière;
- $(I - A)^{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k$  avec  $C_k = I + A + \dots + A^k$ .

**Exercice 5** Estimation de l'erreur dans le calcul de l'inverse

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  inversible et  $B$  une approximation de  $A^{-1}$ . On pose  $X = I - AB$  et on suppose que  $\|X\| < 1$ . Montrer que

$$\|A^{-1} - B\| \leq \frac{\|BX\|}{1 - \|X\|}.$$

**Exercice 6** Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ 

Soient

- $H = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  engendré par les vecteurs  $\{v_i\}$  supposés indépendants;
- $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_r]$  la matrice de type  $n \times r$  dont les colonnes sont les composantes des  $v_i$  dans la base canonique  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  on désigne par  $y$  sa projection orthogonale sur  $H$  et par  $X$  et  $Y$  les matrices colonnes des composantes de  $x$  et  $y$  dans la base  $\mathcal{E}$ . On pose

$$y = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i.$$

1. Montrer que la matrice  $G = G(v_1, \dots, v_r) = V^T V$  est inversible.
2. Montrer que les  $\alpha_i$  vérifient le système

$$G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = V^T X$$

3. En déduire que  $Y = VG^{-1}V^T X = PX$  avec  $P = VG^{-1}V^T$  ( $P$  est donc la matrice de la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^n$  sur  $H$ )
4. *Application:* on considère  $n = 3, v_1 = e_1, v_2 = e_1 + e_2 + e_3$ . Déterminer la projection orthogonale sur  $H = \text{span}\{v_1, v_2\}$  de  $x = 2e_1 - e_2 + e_3$ .
5. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur  $H = \text{span}\{v\}$ ?
6. Montrer que, pour  $x \in \mathbb{R}^n$

$$d^2(x, H) = \frac{\det G(x, v_1, \dots, v_r)}{\det G(v_1, \dots, v_r)}$$

## Correction de l'exercice 1 ▲

---

1.  $VA$  remplace la ligne  $i$  par sa somme avec la ligne  $j$  multipliée par  $\lambda$ .

$AV$  remplace la colonne  $j$  par sa somme avec la colonne  $i$  multipliée par  $\lambda$ .

2.  $V_{ij}(\lambda)V_{kj} = I + \lambda E_{ij} + \lambda' E_{kj}$

3. Il suffit de montrer que  $(I + l_i e_i^T)(I - l_i e_i^T) = I$ .

4.  $L(l_i) = V_{i+1,i}(l_{i+1,i}) \cdots V_{n,i}(l_{n,i})$

5.  $L^{-1} = L(-l_{n-1})L(-l_{n-2}) \cdots L(-l_1) \neq I - l_1 e_1^T - \cdots - l_{n-1} e_{n-1}^T$

6. (a) algorithme en utilisant l'expression de  $L^{-1}$

Pour  $i = 1$  à  $n - 1$

calcul de  $L(-l_i)b$

Pour  $j = i + 1$  à  $n$

$$b_j \leftarrow b_j - l_{ji} b_i$$

(b) algorithme en résolvant le système triangulaire

$$x_1 = b_1$$

Pour  $i = 2$  à  $n$

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j$$

conclusion: le nombre de calculs et l'espace mémoire utilisés sont les mêmes.

---

## Correction de l'exercice 2 ▲

---

Pour démontrer l'égalité il suffit de multiplier le membre de droite par  $5A + UVB$  et montrer que l'on obtient l'identité.

Domaine de validité:  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  inversible,  $U \in \mathcal{M}_{n \times p}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p \times q}$ ,  $V \in \mathcal{M}_{q \times n}$ ,  $I + BVA^{-1}U$  inversible.

1. On obtient la formule de Sherman-Morrison:

$$(A + \beta uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{\beta}{1 + \beta v^T A^{-1} u} A^{-1} uv^T A^{-1}$$

qui permet le calcul de l'inverse d'une matrice qui apparait comme perturbation de rang 1 d'une matrice dont on connait l'inverse.

2.

$$B \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (A + uv^T)x + yu = 0 \\ v^T x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -yA^{-1}u \\ v^T x = -yv^T A^{-1}u = 0 \end{cases}$$

ce qui donne  $x = 0, y = 0$  et donc  $B$  est inversible.

3. En appliquant la formule générale on obtient

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1}uv^T A^{-1} & A^{-1}u \\ v^T A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

4. En appliquant la même formule on obtient

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} + P^{-1}Q\Delta^{-1}RP^{-1} & -P^{-1}Q\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}RP^{-1} & \Delta^{-1} \end{pmatrix}$$

avec  $\Delta = S - RP^{-1}Q$ .

5. Calcul récursif de l'inverse : on dispose de  $A_{n-1}^{-1}$  de taille  $(n-1) \times (n-1)$  et on veut calculer l'inverse de

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} & v \\ u^T & s \end{pmatrix} \text{ avec } u, v \in \mathbb{R}^{n-1}, s \in \mathbb{R}$$

en utilisant la formule précédente on obtient

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} + \frac{1}{\delta} A_{n-1}^{-1} v u^T A_{n-1}^{-1} & -A_{n-1}^{-1} \frac{v}{\delta} \\ -u^T A_{n-1}^{-1} / \delta & \frac{1}{\delta} \end{pmatrix}$$

avec  $\delta = s - u^T A_{n-1}^{-1} v$ .

et on en déduit facilement l'algorithme.

### Correction de l'exercice 3 ▲

1.  $\|A\|_2^2 = \rho(A^*A)$  rayon spectral de la matrice  $A^*A$ . D'un autre côté on a :

$$\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^*A) \begin{cases} \geq \rho(A^*A) \\ \leq n\rho(A^*A) \end{cases}$$

où  $\text{tr}$  est la trace de la matrice et  $\lambda_i$  ses valeurs propres.

- 2.

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F = \left( \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \leq (mn \max_{i,j} |a_{ij}|^2)^{1/2} = \sqrt{mn} \max_{i,j} |a_{ij}|$$

Soit  $x$  tel que : si  $\max |a_{ij}| = |a_{i_0 j_0}|$  alors on pose  $x = e_{j_0}$ ,  $\|x\|_2 = 1$ . Alors

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |a_{i j_0}|^2 \geq \max |a_{ij}|^2 \Rightarrow \sup \|Ax\|_2^2 \geq \max |a_{ij}|^2$$

3. On rappelle que  $\|A\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|$  pour un certain  $i_0$ . Alors

$$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \leq m \times \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \leq m \max (\sum_{j=1}^n |a_{ij}|)^2 = m \|A\|_\infty^2$$

Choisissons maintenant  $x = (x_i)$  avec  $x_i = \text{signe}(a_{i_0 i})$ . Alors

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \|A\|_\infty$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{n} \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 \geq \|A\|_\infty^2 \Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \geq \frac{\|A\|_\infty}{\sqrt{n}}$$

ce qui implique  $\|A\|_2 \geq \|A\|_\infty / \sqrt{n}$

4. Même démonstration que précédemment ou alors constater que  $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$ .

5.  $\|E\|_F^2 = \sum_{i,j} u_i^2 v_j^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i^2 v_j^2 = \|u\|_2^2 \|v\|_2^2$

$$\|E\|_\infty = \max_i \left( \sum_{j=1}^n |u_i v_j| \right) = \max_i \left( |u_i| \sum_{j=1}^n |v_j| \right) = \|v\|_1 \|u\|_\infty$$

$$\|Ex\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (u_i \sum_{j=1}^n v_j x_j)^2 = \sum_{i=1}^m u_i^2 \times (x, x)^2 = \|u\|_2^2 (x, v)^2$$

$$\frac{\|Ex\|_2}{\|x\|_2} = \frac{(x, v)}{\|x\|_2} \|u\|_2 \Rightarrow \sup_x \frac{\|Ex\|_2}{\|x\|_2} = \|v\|_2 \|u\|_2$$

---

**Correction de l'exercice 4 ▲**

---

$\rho(A) < 1 \Rightarrow 1$  n'est pas valeur propre de  $A \Rightarrow 0$  n'est pas valeur propre de  $I - A \Rightarrow I - A$  inversible

$$(I - A)C_k = (I - A)(I + A + \dots + A^k) = I - A^{k+1}$$

$C_k = (I - A)^{-1}(I - A^{k+1}) \Rightarrow (I - A)^{-1} - C_k = (I - A)^{-1}A^{k+1}$  et donc

$$\|(I - A)^{-1} - C_k\| \leq \|(I - A)^{-1}\| \|A^{k+1}\| \leq \|(I - A)^{-1}\| \|A\|^{k+1}$$

Comme  $\|A\| < 1$  pour au moins une norme subordonnée on obtient finalement

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(I - A)^{-1} - C_k\| = 0$$

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

---

$AB = I - X \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = (I - X)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = B(I - X)^{-1} = B(I + X + X^2 + \dots)$

$$\|A^{-1} - B\| \leq \|BX\| \|I + X + \dots\| \leq \|BX\| (1 + \|X\| + \|X\|^2 + \dots) \leq \frac{\|BX\|}{1 - \|X\|}.$$

pour  $\|X\| < 1$

---