



## Théorème de Sylow

---

### Exercice 1

Soient  $G$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$ . Montrer que si  $H$  et  $G/H$  sont des  $p$ -groupes, il en est de même de  $G$ .

[Indication ▼](#)

[002190]

### Exercice 2

Soit  $G$  un  $p$ -groupe et  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$ . Montrer que  $H \cap Z(G)$  n'est pas réduit à l'élément neutre.

[Correction ▼](#)

[002191]

### Exercice 3

Soit  $G$  un  $p$ -groupe d'ordre  $p^r$ .

(a) Montrer que pour tout entier  $k \leq r$ ,  $G$  possède un sous-groupe distingué d'ordre  $p^k$ .

(b) Montrer qu'il existe une suite  $G_0 = \{1\} \subset G_1 \subset \dots \subset G_r = G$  de sous-groupes  $G_i$  distingués d'ordre  $p^i$  ( $i = 1, \dots, r$ ).

(c) Montrer que pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$  d'ordre  $p^s$  avec  $s < r$ , il existe un sous-groupe d'ordre  $p^{s+1}$  de  $G$  qui contient  $H$ .

[Indication ▼](#)

[Correction ▼](#)

[002192]

### Exercice 4

Soit  $G$  un groupe d'ordre  $2p$ , où  $p$  est un nombre premier supérieur ou égal à 3. Montrer que  $G$  contient un unique sous-groupe  $H$  d'ordre  $p$  et que ce sous-groupe est distingué. Vérifier que les seuls automorphismes d'ordre 2 d'un groupe cyclique d'ordre  $p$  sont l'identité et le passage à l'inverse. En déduire que le groupe  $G$  est soit cyclique, soit non commutatif, auquel cas il possède deux générateurs  $s$  et  $t$  vérifiant les relations  $s^p = 1$ ,  $t^2 = 1$  et  $tst^{-1} = s^{-1}$ .

[Correction ▼](#)

[002193]

### Exercice 5

Soit  $G$  un groupe non commutatif d'ordre 8.

(a) Montrer que  $G$  contient un élément  $a$  d'ordre 4 et que le sous-groupe  $H$  de  $G$  engendré par  $a$  est distingué dans  $G$ .

(b) On suppose ici qu'il existe un élément  $b$  de  $G \setminus H$  qui est d'ordre 2. Soit  $K$  le sous-groupe engendré par  $b$ . Montrer que dans ce cas  $G$  est isomorphe au produit semi-direct de  $H$  par  $K$ , le générateur  $b$  de  $K$  agissant sur  $H$  via l'automorphisme  $x \rightarrow x^{-1}$ . Le groupe est alors isomorphe au groupe diédral  $D_4$ .

(c) Dans le cas contraire, soit  $b$  un élément d'ordre 4 de  $G$  n'appartenant pas à  $H$ . Montrer que  $a^2$  est le seul élément d'ordre 2 de  $G$ , que le centre  $Z(G)$  de  $G$  est égal à  $\{1, a^2\}$ . On pose  $-1 = a^2$ . Montrer que  $a$  et  $b$  vérifient les relations suivantes:  $a^2 = b^2 = -1$ ,  $bab^{-1} = a^{-1}$ . Enfin on pose  $ab = c$ . Vérifier les relations suivantes:

$$a^2 = b^2 = c^2 = -1 \quad ab = -ba = c \quad bc = -cb = a \quad ca = -ac = b$$

(l'écriture  $-x$  signifiant ici  $(-1)x$ ). Ce dernier groupe est le groupe des quaternions.

[Correction ▼](#)

[002194]

---

**Exercice 6**

Montrer que le groupe diédral  $D_6$  est isomorphe au produit direct  $\mu_2 \times S_3$ .

[Indication ▼](#)

[002195]

---

**Exercice 7**

(a) Soit  $G$  un groupe non abélien d'ordre 12. Soit  $H$  un 3-Sylow de  $G$ . On considère le morphisme  $\theta : G \rightarrow S_{G/H}$  correspondant à l'action de  $G$  par translation de  $G$  sur  $G/H$ . Montrer que ce morphisme n'est pas injectif si et seulement si  $H$  est distingué dans  $G$ . En déduire que si  $H$  n'est pas distingué dans  $G$ , le groupe  $G$  est isomorphe à  $A_4$ .

(b) On suppose que  $G$  n'est pas isomorphe à  $A_4$ . Montrer qu'alors  $G$  admet un unique 3-Sylow  $H = \{1, a, a^2\}$ . Montrer ensuite que si  $G$  contient un élément  $b$  d'ordre 4,  $a$  et  $b$  vérifient les relations:

$$a^3 = b^4 = 1 \quad bab^{-1} = a^2 = a^{-1}$$

Montrer que dans le cas contraire  $G \simeq D_6$ .

(c) Donner la liste des classes d'isomorphisme de groupes d'ordre 12.

[Correction ▼](#)

[002196]

---

**Exercice 8**

Soient  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$ . On se donne un nombre premier  $p$  et l'on suppose que  $H$  admet un unique  $p$ -Sylow  $S$ . Montrer que  $S$  est distingué dans  $G$ .

[Indication ▼](#)

[002197]

---

**Exercice 9**

Soient  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$ . On se donne un nombre premier  $p$  et un  $p$ -Sylow  $P$  de  $G$ . Montrer que  $H \cap P$  est un  $p$ -Sylow de  $H$  et que  $HP/H$  est un  $p$ -Sylow de  $G/H$ .

[Correction ▼](#)

[002198]

---

**Exercice 10**

Montrer qu'un groupe d'ordre 200 n'est pas simple.

[Correction ▼](#)

[002199]

---

**Exercice 11**

Pour  $p$  un nombre premier, déterminer le nombre de  $p$ -sous-groupes de Sylow du groupe symétrique  $S_p$ .

[Correction ▼](#)

[002200]

---

**Exercice 12**

(a) Donner l'ensemble  $\mathcal{D}$  des ordres possibles des éléments du groupe alterné  $A_5$  et pour chaque  $d \in \mathcal{D}$ , indiquer le nombre d'éléments de  $A_5$  d'ordre  $d$ .

(b) Montrer que, pour  $d = 2$  et  $d = 3$ , les éléments d'ordre  $d$  sont conjugués, et que les sous-groupes d'ordre 5 sont conjugués.

(c) Déduire une preuve de la simplicité de  $A_5$ .

[Indication ▼](#)

[002201]

---

**Exercice 13**

Déterminer les sous-groupes de Sylow du groupe alterné  $A_5$ .

[Indication ▼](#)

[Correction ▼](#)

[002202]

---

**Exercice 14**

---

Soit  $G$  un groupe simple d'ordre 60.

(a) Montrer que  $G$  admet 6 5-Sylow, et que l'action de conjugaison sur ses 5-Sylow définit un morphisme injectif  $\alpha : G \rightarrow S_6$ , une fois une numérotation des 5-Sylow de  $G$  choisie. Montrer que l'image  $\alpha(G) = H$  est contenue dans  $A_6$ .

(b) On considère l'action de  $A_6$  par translation à gauche sur l'ensemble  $A_6/.H$  des classes à gauche. Montrer qu'elle définit un isomorphisme  $\varphi : A_6 \rightarrow A_6$ , une fois une numérotation des éléments de  $A_6/.H$  choisie.

(c) Montrer que  $\varphi(H)$  est le fixateur de la classe de l'élément neutre  $H$ , et en conclure que  $G \simeq A_5$ .

[Correction ▼](#)

[002203]

### Exercice 15

Soient  $p < q$  deux nombres premiers distincts et  $G$  un groupe d'ordre  $pq$ . Montrer que  $G$  admet un unique  $q$ -Sylow  $Q$  qui est distingué et que  $G = QP$ , où  $P$  est un  $p$ -Sylow de  $G$ . Montrer que  $G$  est isomorphe au produit semi-direct d'un groupe cyclique d'ordre  $q$  par un groupe cyclique d'ordre  $p$ . Montrer que si  $q - 1$  n'est pas divisible par  $p$ , ce produit semi-direct est en fait un produit direct.

[Indication ▼](#)

[002204]

### Exercice 16

Montrer qu'un groupe d'ordre 35 est cyclique.

[Indication ▼](#)

[002205]

### Exercice 17

Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers et  $G$  un groupe d'ordre  $p^2q$ . On suppose que  $p^2 - 1$  n'est pas divisible par  $q$  et que  $q - 1$  n'est pas divisible par  $p$ . Montrer que  $G$  est abélien.

[Correction ▼](#)

[002206]

### Exercice 18

Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers. Montrer qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre  $p^2q$ .

[Indication ▼](#)

[Correction ▼](#)

[002207]

### Exercice 19

Soit  $G$  un groupe d'ordre 399.

(a) Montrer que  $G$  admet un unique 19-Sylow  $P$  qui est distingué dans  $G$ .

(b) Soit  $Q$  un 7-Sylow. Montrer que  $N = PQ$  est un sous-groupe d'ordre 133 de  $G$  et que ce groupe est cyclique.

(c) On suppose que  $Q$  n'est pas distingué dans  $G$ . Montrer que  $G$  admet 57 sous-groupes cycliques d'ordre 133 distincts deux à deux. Quel serait le nombre d'éléments d'ordre 133 dans  $G$ ? Aboutir à une contradiction. En déduire que  $Q$  est distingué dans  $G$  et que  $N$  est distingué dans  $G$ .

(d) Montrer que  $G = NR$ , où  $R$  est un 3-Sylow. En déduire que  $G$  est isomorphe au produit semi-direct d'un groupe cyclique d'ordre 133 par un groupe cyclique d'ordre 3.

[Correction ▼](#)

[002208]

### Exercice 20

Soit  $G$  un groupe simple d'ordre 60.

(a) Montrer que  $G$  n'admet pas de sous-groupe d'ordre 20.

(b) Montrer que si  $G$  admet un sous-groupe  $K$  d'ordre 12, alors  $K$  admet 4 3-Sylow.

(c) Montrer que si  $H$  et  $K$  sont deux sous-groupes distinct d'ordre 4 de  $G$  alors  $H \cap K = \{1\}$ .

(d) Montrer que si  $H$  est un 2-Sylow, alors  $H \neq \text{Nor}_G(H)$ .

(e) Montrer que  $G$  possède 5 2-Sylow.

(f) Conclure en considérant l'action de  $G$  par conjugaison sur les 5-Sylow.



**Indication pour l'exercice 1 ▲**

---

$$|G| = |G/H| |H|.$$

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

Pour les trois énoncés (a), (b) et (c), raisonner par récurrence sur  $r$  en utilisant le fait que le centre d'un  $p$ -groupe n'est pas trivial.

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

On a

$$D_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mu_2 \times S_3$$

Le premier isomorphisme est une application standard du lemme chinois. Pour le deuxième, noter que le premier  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est dans le centre du groupe et donc que l'action sur lui par conjugaison du second  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est triviale. L'isomorphisme  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq S_3$  est classique.

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

Pour tout  $g \in G$ ,  $gSg^{-1}$  est un  $p$ -Sylow de  $gHg^{-1} = H$  et donc  $gSg^{-1} = S$ .

---

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

Pour le (c), pour  $H \neq \{1\}$  sous-groupe distingué de  $A_5$ , raisonner sur les éléments d'ordre 2, 3 et 5 contenus dans  $H$ .

---

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

L'identification de chacun des  $p$ -Sylow ne pose pas de difficulté. Observer ensuite que les sous-groupes de Sylow sont deux à deux d'intersection réduite à  $\{1\}$  et déterminer leur nombre en comptant les éléments d'ordre 2, 3 et 5.

---

**Indication pour l'exercice 15 ▲**

Les théorèmes de Sylow montrent qu'il n'y a qu'un seul  $q$ -Sylow, nécessairement distingué. La suite est standard. Pour le dernier point, utiliser que  $\text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$  (exercice ??) et donc que  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ne peut agir non trivialement sur  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  que si  $p$  divise  $q - 1$ .

---

**Indication pour l'exercice 16 ▲**

D'après l'exercice 15, un groupe d'ordre 35 est isomorphe à  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ , lequel est isomorphe au groupe cyclique  $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$  par le lemme chinois.

---

**Indication pour l'exercice 18 ▲**

Soit  $G$  un groupe d'ordre  $p^2q$  qu'on suppose simple. On distinguera deux cas:  $p > q$  et  $p < q$ . Dans le premier, montrer que  $G$  admet  $q$   $p$ -Sylow d'ordre  $p^2$  et que l'action par conjugaison de  $G$  sur les  $p$ -Sylow définit un morphisme injectif  $G \hookrightarrow S_q$  et aboutir à une contradiction. Dans le second, raisonner sur le nombre de  $q$ -Sylow pour aboutir à une contradiction (on sera notamment amené à éliminer le cas  $p = 2$  et  $q = 3$ ).

---

**Indication pour l'exercice 20 ▲**

(a) Si  $K$  est un sous-groupe d'ordre 20,  $K$  a un seul 5-Sylow  $L$  et donc  $K \subset \text{Nor}_G(L)$  ce qui entraîne que l'ordre de  $\text{Nor}_G(L)$  est 20 ou 60. Mais alors il y aurait 1 ou 3 5-Sylow dans  $G$ . Or 1 est impossible car  $G$  est simple et 3 contredit les prédictions du théorème de Sylow.

(b) Si  $K$  a un unique 3-Sylow  $L$ ,  $K \subset \text{Nor}_G(L)$ , et donc l'ordre de  $\text{Nor}_G(L)$  serait 12 ou 60. Il y aurait alors 5 ou 1 3-Sylow dans  $G$ . Comme ci-dessus, c'est impossible.

- (c) Supposons que  $H \cap K = \langle a \rangle$  soit d'ordre 2. Le centralisateur  $\text{Cen}_G(a)$  de  $a$  contient  $H$  et  $K$ , donc  $H \cup K$ . Son ordre est au moins 6 et est divisible par 4. Les seules possibilités sont 12, 20, 60:
- 60 est impossible, car  $\langle a \rangle$  serait distingué dans  $G$
  - 20 est impossible, d'après la question (a)
  - 12 est impossible, car  $\text{Cen}_G(a)$  aurait 4 3-Sylow d'après la question (b). Il ne resterait de la place que pour un seul 2-Sylow ce qui contredit  $H \cup K \subset \text{Cen}_G(a)$ .
- (d) Si  $H = \text{Nor}_G(H)$ , il y a 15 2-Sylow, et donc 46 éléments d'ordre une puissance de 2. Or il y a 6 5-Sylow d'intersections deux à deux triviales, et donc 24 éléments d'ordre 5. L'inégalité  $46 + 24 > 60$  fournit une contradiction.
- (e) Si  $H$  est un 2-Sylow, l'ordre de  $\text{Nor}_G(H)$  est 12, 20 ou 60. Mais 20 est exclu (question (a)) de même que 60 ( $G$  est simple). La seule possibilité est 12; il y a donc 5 2-Sylow.
- (f) L'action de  $G$  par conjugaison sur les 5-Sylow fournit un morphisme  $c : G \rightarrow S_5$  qui est injectif (car  $G$  est simple). Le groupe  $G$  est donc isomorphe à son image  $c(G)$  qui est un sous-groupe d'ordre 60, donc d'indice 2 dans  $S_5$ . C'est donc  $A_5$ .
-

### Correction de l'exercice 2 ▲

Le sous-groupe  $H \subset G$  étant distingué,  $G$  agit par conjugaison sur  $H$ . Comme  $G$  est un  $p$ -groupe,  $H$  l'est aussi et les orbites non triviales de cette action sont de longueur divisible par  $p$ . On déduit que la réunion des orbites triviales, c'est-à-dire l'ensemble  $H \cap Z(G)$  des points fixes, est aussi de cardinal divisible par  $p$ . Comme il contient l'élément neutre, il contient au moins  $p$  éléments et n'est donc pas réduit à l'élément neutre.

### Correction de l'exercice 3 ▲

(a) Soit  $G$  un  $p$ -groupe d'ordre  $p^r$ . Son centre  $Z(G)$  est un  $p$ -groupe non trivial. Soit  $x \in Z(G) \setminus \{1\}$ . Si  $p^v > 0$  est son ordre, alors  $x^{p^{v-1}}$  est d'ordre  $p$  et dans  $Z(G)$ ; on peut donc supposer que  $x$  lui-même est d'ordre  $p$ . Le groupe  $\langle x \rangle$  est distingué dans  $G$  et le groupe quotient  $G/\langle x \rangle$  est d'ordre  $p^{r-1}$ . Par hypothèse de récurrence, pour tout  $k \leq r$ , le groupe  $G/\langle x \rangle$  possède un sous-groupe distingué  $\mathcal{H}$  d'ordre  $p^{k-1}$ . Soit  $H$  le sous-groupe image réciproque de  $\mathcal{H}$  par la surjection canonique  $G \rightarrow G/\langle x \rangle$ . Le sous-groupe  $H$ , image réciproque par un morphisme d'un sous-groupe distingué, est distingué dans  $G$  et  $\mathcal{H} = H/\langle x \rangle$ , ce qui donne  $|H| = |\mathcal{H}| |\langle x \rangle| = p^k$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

Comme  $p$  divise  $|G|$ , il existe dans  $G$  un élément  $s$  d'ordre  $p$ . Le sous-groupe  $H = \langle s \rangle$ , d'indice 2, est nécessairement distingué dans  $G$ . Il est de plus le seul sous-groupe d'ordre  $p$  (cf l'exercice ??).

De façon générale, un automorphisme  $\chi$  d'un groupe cyclique  $\langle \zeta \rangle$  d'ordre  $p$  est déterminé par  $\chi(\zeta) = \zeta^{i_\chi}$  et cet automorphisme est d'ordre 2 si et seulement si  $i_\chi^2 \equiv 1 \pmod{p}$ , c'est-à-dire si  $\chi(\zeta) = \zeta$  ou  $\chi(\zeta) = \zeta^{-1}$  ce qui correspond aux deux automorphismes "identité" et "passage à l'inverse" (que  $p$  soit premier n'intervient pas ici; le résultat est valable pour tout entier  $p \geq 1$ ).

Soit  $t \in G$  d'ordre 2 (qui existe car 2 divise  $|G|$ ). La conjugaison par  $t$  induit un automorphisme du sous-groupe distingué  $H$ . D'après ce qui précède, on a  $tst^{-1} = s$  ou bien  $tst^{-1} = s^{-1}$ . Dans le premier cas, la correspondance  $(s^i, t^\varepsilon) \rightarrow s^i \cdot t^\varepsilon$  ( $i = 0, 1, 2$  et  $\varepsilon = \pm 1$ ) induit un morphisme entre le produit direct  $\langle s \rangle \times \langle t \rangle$  et  $G$ , lequel est injectif (car  $\langle s \rangle \cap \langle t \rangle = \{1\}$ ) et donc est bijectif (puisque les groupes de départ et d'arrivée ont même ordre  $2p$ ). Dans ce cas on a donc  $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$  cyclique. Dans l'autre cas,  $G$  est non commutatif (puisque  $tst^{-1} = s^{-1} \neq s$ ); il est engendré par  $s$  et  $t$  qui vérifient les relations  $s^p = 1, t^2 = 1$  et  $tst^{-1} = s^{-1}$ . Dans ce cas  $G$  est isomorphe au groupe diédral  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  d'ordre  $2p$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

(a) Le groupe  $G$  n'étant pas abélien n'est pas cyclique d'ordre 8 et possède au moins un élément  $a \neq 1$  qui n'est pas d'ordre 2 (cf l'exercice ??). Cet élément est nécessairement d'ordre 4. Le sous-groupe  $H = \langle a \rangle$  est distingué car d'indice 2.

(b) Supposons qu'il existe  $b \in G \setminus H$  d'ordre 2 et posons  $K = \langle b \rangle$ . On a  $H \cap K = \{1\}$  car  $b \notin H$ . Le sous-groupe  $H$  étant distingué dans  $G$ , on peut écrire que  $HK/H \simeq K$ , ce qui donne  $|HK| = |H| |K| = 8$  et donc  $G = HK$ . De plus, l'inclusion  $K \subset G$  est une section de la suite exacte  $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$ . Le groupe  $G$  est donc isomorphe au produit semi-direct de  $H$  par  $K$ . L'action sur  $H$  du générateur  $b$  d'ordre 2 de  $K$  est nécessairement donnée par le passage à l'inverse (cf exercice 4).

(c) Dans le cas contraire à (b), tous les éléments de  $G \setminus H$  sont nécessairement d'ordre 4. Les éléments de  $G$  d'ordre 2 sont donc dans  $H$ , qui n'en possède qu'un:  $a^2$ , qu'on note  $-1$ .

Le centre  $Z(G)$  est d'ordre différent de 1 car  $G$  est un 2-groupe et différent de 8 car  $G$  est non abélien. Il n'est pas non plus d'ordre 4 car alors on aurait  $G = Z(G) \cup xZ(G)$  pour un  $x \in G \setminus Z(G)$  mais alors  $G$  serait abélien. Le centre  $Z(G)$  est donc d'ordre 2. D'après ce qui précède  $Z(G) = \{1, -1\}$ .

Soit  $b \in G \setminus H$ . Alors  $G$  est engendré par  $a$  et  $b$ . D'autre part  $b$  est d'ordre 4 et  $b^2$  d'ordre 2 ce qui entraîne  $b^2 = -1$ . La conjugaison par  $b$  induit un automorphisme du sous-groupe distingué  $\langle a \rangle$ ; on a donc  $bab^{-1} = a^{-1}$ , le seul autre cas  $bab^{-1} = a$  étant exclu car  $G$  non abélien. On obtient ensuite aisément que si  $ab = c$ , on a  $c^2 = -1$  ( $c^2 = abab = aa^{-1}bb = b^2 = -1$ ) et  $ba = -ab = -c, bc = -cb = a, ca = -ac = b$ .

### Correction de l'exercice 7 ▲

(a) On a  $\theta(g)(xH) = gxH$  ( $g, x \in G$ ). Le noyau de  $\theta$  est l'intersection de tous les conjugués  $xHx^{-1}$  de  $H$ , c'est-à-dire, d'après les théorèmes de Sylow, l'intersection de tous les 3-Sylow de  $G$ . Comme l'intersection de deux 3-Sylow distincts est triviale, le noyau est  $\neq \{1\}$  si et seulement s'il n'existe qu'un seul 3-Sylow, qui est alors automatiquement distingué dans  $G$ .

Si  $H$  est non distingué dans  $G$ , alors  $\theta$  est injectif et fournit un isomorphisme entre  $G$  et un sous-groupe de  $S_4$ . Ce sous-groupe devant être d'ordre 12 comme  $G$ , c'est nécessairement  $A_4$  (cf l'exercice ??).

(b) Si  $G$  n'est pas isomorphe à  $A_4$ , alors nécessairement  $H$  est distingué dans  $G$  et c'est alors l'unique 3-Sylow de  $G$ . Notons  $1, a, a^2$  les trois éléments distincts du groupe cyclique  $H$ .

Supposons que  $G$  contienne un élément  $b$  d'ordre 4. On a  $b^4 = a^3 = 1$ . D'autre part, la conjugaison par  $b$  laissant invariant le sous-groupe distingué  $H = \langle a \rangle$ , l'élément  $bab^{-1}$  doit être un générateur de  $\langle a \rangle$ , c'est-à-dire  $a$  ou  $a^{-1}$ . Mais la première possibilité est exclue car sinon  $b$  serait dans le centre de  $G$  et  $G$  serait abélien (cf exercice ??). La seconde possibilité existe bien: on prend par exemple pour  $G$  le produit semi direct  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  où l'action de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  se fait à travers la surjection canonique  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire, les classes de 0 et 2 modulo 4 agissent comme l'identité et celles de 1 et 3 comme le passage à l'inverse.

Supposons au contraire qu'aucun élément de  $G \setminus H$  soit d'ordre 4. Les 2-Sylow sont donc isomorphes au groupe de Klein  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . De plus, deux quelconques  $B$  et  $B'$  d'entre eux sont forcément d'intersection non triviale car sinon l'ensemble produit  $BB'$  (qui est en bijection avec  $B \times B'$  par  $(b, b') \rightarrow bb'$ ) serait de cardinal  $|B||B'| = 16 > 12$ . Il y a donc strictement moins de  $3 \times 3 = 9$  éléments d'ordre 2 dans  $G$ . Comme  $G \setminus H$  est de cardinal 9, il existe dans  $G$  un élément  $c$  d'ordre  $\neq 2$ . Cet élément ne pouvant non plus être d'ordre 3 ( $H$  est le seul 3-Sylow), ni d'ordre 4 (par hypothèse) est d'ordre 6. Le groupe  $\langle c \rangle$  est alors d'indice 2 et donc distingué dans  $G$ . Comme  $\langle c \rangle$  est cyclique, il ne possède qu'un seul élément d'ordre 2. On peut donc trouver dans un 2-Sylow de  $G$  un élément  $d \in G \setminus \langle c \rangle$  d'ordre 2. La conjugaison par  $d$  induit un automorphisme de  $\langle c \rangle$  qui envoie  $c$  sur un générateur de  $\langle c \rangle$ , c'est-à-dire ou bien  $c$  ou bien  $c^{-1}$ . Mais la première possibilité est exclue car  $G$  n'est pas abélien. On a donc  $dcd^{-1} = c^{-1}$ ; le groupe  $G$  est dans ce cas isomorphe au groupe diédral  $D_6$ .

(c) Les groupes d'ordre 12 sont

- les groupes abéliens:  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , et

- les groupes non abéliens:  $A_4$ ,  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  (pour l'action donnée ci-dessus) et  $D_6$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

Le groupe  $P$  est un  $p$ -sous groupe maximal de  $G$  et donc aussi de  $HP$  puisque  $P \subset HP$  (noter que  $HP$  est un sous-groupe car  $H$  est supposé distingué dans  $G$ );  $P$  est donc un  $p$ -Sylow de  $HP$ . Si  $|P| = p^n$ , alors  $|HP| = p^n s$  avec  $p$  ne divisant pas  $s$ . On peut aussi écrire  $|H| = p^m r$  avec  $p$  ne divisant pas  $r$ ; on a alors nécessairement  $m \leq n$  et  $s$  multiple de  $r$ . On a aussi  $HP/H \simeq P/(H \cap P)$  ce qui donne  $|H \cap P| = |P||H|/|HP| = p^m(r/s)$ . On obtient donc que  $s = r$  et que  $H \cap P$  est un  $p$ -Sylow du groupe  $H$ .

On a aussi  $|G| = p^n t$  avec  $p$  ne divisant pas  $t$  et  $t$  multiple de  $s$ . On en déduit  $|G/H| = p^{n-m}(t/r)$ . Comme  $t/r$  est un entier non divisible par  $p$  et que  $HP/H$  est un sous-groupe de  $G/H$  d'ordre  $|HP/H| = p^{n-m}$ , le groupe  $HP/H$  est un  $p$ -Sylow de  $G/H$ .

### Correction de l'exercice 10 ▲

D'après les théorèmes de Sylow, le nombre de 5-Sylow d'un groupe d'ordre  $200 = 5^2 \cdot 2^3$  est  $\equiv 1 \pmod{5}$  et divise 8. Ce ne peut être que 1. L'unique 5-Sylow est nécessairement distingué puisque ses conjugués sont des 5-Sylow et coïncident donc avec lui. Le groupe ne peut pas être simple.

### Correction de l'exercice 11 ▲

Les  $p$ -Sylow de  $S_p$  sont d'ordre  $p$  puisque  $p$ , étant premier, ne divise pas  $p!/p = (p-1)!$ . Chaque  $p$ -Sylow est donc cyclique d'ordre  $p$  et contient  $p-1$  éléments d'ordre  $p$ . Les éléments d'ordre  $p$  de  $S_p$  sont les  $p$ -cycles; il y en a  $(p-1)!$ . Il y a donc  $(p-2)!$   $p$ -Sylow. (On retrouve le théorème de Wilson:  $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$  (ou  $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ) si  $p$  est premier).

### Correction de l'exercice 13 ▲

---

Le groupe alterné  $A_5$  est d'ordre  $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ .

Les 5-Sylow sont d'ordre 5, donc cycliques; chacun est engendré par un 5-cycle et contient 4 5-cycles. Les 5-Sylow sont deux à deux d'intersection réduite à  $\{1\}$ . Comme il y a 24 5-cycles dans  $A_5$ , il y a 6 5-Sylow. (On peut aussi utiliser les théorèmes de Sylow: Le nombre de 5-Sylow est  $\equiv 1 \pmod{5}$  et divise 12; c'est donc 1 ou 6. Comme ce ne peut être 1 (car il y aurait alors un unique 5-Sylow qui serait distingué, ce qui est impossible car  $A_5$  est simple), c'est 6.)

Les 3-Sylow sont d'ordre 3, donc cycliques; chacun est engendré par un 3-cycle et contient 2 3-cycles. Les 3-Sylow sont deux à deux d'intersection réduite à  $\{1\}$ . Comme il y a 20 3-cycles dans  $A_5$ , il y a 10 3-Sylow. (Par les théorèmes de Sylow: le nombre de 3-Sylow est  $\equiv 1 \pmod{3}$  et divise 20; c'est donc 1, 4 ou 10. Comme ci-dessus, ce ne peut être 1. Si c'était 4, la conjugaison de  $A_5$  sur ces 3-Sylow induirait un morphisme  $A_5 \rightarrow S_4$  non trivial (puisque cette action par conjugaison est transitive) et donc injectif (puisque le noyau, distingué, est forcément trivial). Or l'ordre de  $A_5$  ne divise pas celui de  $S_4$ . Il y a donc 10 3-Sylow.)

Les 2-Sylow sont d'ordre 4, donc commutatifs. Comme il n'y a pas d'élément d'ordre 4 dans  $A_5$ , chaque 2-Sylow est isomorphe au groupe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ; il est engendré par deux produits de deux transpositions qui commutent et contient 3 éléments d'ordre 2. On voit ensuite que ces trois éléments d'ordre 2 sont les 3 produits de deux transpositions qui commutent qu'on peut former avec quatre éléments de  $\{1, \dots, 5\}$ . On en déduit que les 2-Sylow sont deux à deux d'intersection réduite à  $\{1\}$ . Il y a 15 éléments d'ordre 2 dans  $A_5$  et il y a 5 2-Sylow.

Tout élément de  $A_5$  est d'ordre 1, 2, 3 ou 5 et est donc contenu dans un  $p$ -Sylow. On a bien  $6 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1 = 60$ .

---

### Correction de l'exercice 14 ▲

---

(a) Le nombre de 5-Sylow dans un groupe  $G$  d'ordre  $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$  est  $\equiv 1 \pmod{5}$  et divise 12. Comme  $G$  est supposé simple, ce ne peut être 1; il y a donc 6 5-Sylow. Le morphisme  $\alpha : G \rightarrow S_6$  correspondant à l'action de  $G$  par conjugaison sur les 5-Sylow (une fois une numérotation des 5-Sylow de  $G$  choisie) est forcément injectif puisque son noyau, étant un sous-groupe distingué différent de  $G$  (d'après les théorèmes de Sylow,  $G$  agit transitivement sur les 5-Sylow), est nécessairement trivial. Considérons ensuite le groupe  $\alpha^{-1}(A_6)$ . C'est un sous-groupe distingué de  $G$  (comme image réciproque par un morphisme du sous-groupe distingué  $A_6$  de  $S_6$ ). Si  $\alpha^{-1}(A_6) = \{1\}$  alors, pour tout  $g \in G$ , comme  $\alpha(g^2) = \alpha(g)^2 \in A_6$ , on aurait  $g^2 = 1$  et donc  $G$  abélien, ce qui est absurde. On a donc  $\alpha^{-1}(A_6) = G$ , c'est-à-dire,  $\alpha(G) = H \subset A_6$ .

(b) Notons  $\varphi : A_6 \rightarrow S_6$  le morphisme correspondant à l'action de  $A_6$  par translation à gauche sur  $A_6/H$  (une fois une numérotation des éléments de  $A_6/H$  choisie). En utilisant la simplicité de  $A_6$ , on montre comme ci-dessus que  $\varphi$  est injectif et que  $\varphi(A_6) \subset A_6$ . Il en découle que  $\varphi$  est un isomorphisme entre  $A_6$  et  $\varphi(A_6) = A_6$ .

(c) Un élément  $x \in A_6$  fixe la classe neutre  $H$  si et seulement si  $x \in H$ . On obtient que  $H$  est isomorphe, *via*  $\varphi$ , au fixateur d'un entier, disons 6, dans l'action de  $A_6$  sur  $\{1, \dots, 6\}$ , c'est-à-dire, à  $A_6 \cap S_5 = A_5$ .

---

### Correction de l'exercice 17 ▲

---

Le nombre de  $q$ -Sylow d'un groupe  $G$  d'ordre  $p^2q$  est  $\equiv 1 \pmod{q}$  et divise  $p^2$ . Ce ne peut être ni  $p$  ni  $p^2$  car  $p^2 - 1$  est supposé non divisible par  $q$ ; c'est donc 1. De même le nombre de  $p$ -Sylow est  $\equiv 1 \pmod{p}$  et divise  $q$  et ce ne peut être  $q$  car  $q - 1$  est supposé non divisible par  $p$ ; c'est donc 1. Ainsi il y a un unique  $p$ -Sylow  $P$  d'ordre  $p^2$ , et donc abélien, et un unique  $q$ -Sylow  $Q$  d'ordre  $q$ , et donc cyclique, tous deux nécessairement distingués. Il en résulte que tout élément  $x \in P$  commute avec tout élément  $y \in Q$ : en effet le commutateur  $xyx^{-1}y^{-1} = (xyx^{-1})y^{-1} = x(yx^{-1}y^{-1})$  est dans l'intersection  $P \cap Q$  qui est le groupe trivial. Cela montre que le groupe  $PQ$  est abélien; il est isomorphe au produit direct  $P \times Q$  et est donc de cardinal  $|P||Q| = p^2q = |G|$ . D'où finalement  $G = PQ$  est abélien.

---

### Correction de l'exercice 18 ▲

---

Soit  $G$  un groupe d'ordre  $p^2q$  qu'on suppose simple. On distingue deux cas:

1er cas:  $p > q$ . Le nombre de  $p$ -Sylow de  $G$  est  $\equiv 1 \pmod{p}$  et divise  $q$ . Comme  $G$  est simple, ce ne peut

être 1 (car sinon l'unique  $p$ -Sylow serait distingué). Il y a donc  $q$   $p$ -Sylow d'ordre  $p^2$ , lesquels sont conjugués. L'action par conjugaison de  $G$  sur ces  $q$   $p$ -Sylow définit un morphisme  $G \rightarrow S_q$  non trivial (car l'action est transitive) et donc injectif puisque le noyau, distingué et  $\neq G$ , est forcément trivial. On en déduit que  $p^2q$  divise  $q!$  et donc  $p$  divise un entier entre 1 et  $q-1$ , ce qui contredit l'hypothèse  $p > q$ .

2ème cas:  $p < q$ . Le nombre de  $q$ -Sylow de  $G$  est  $\equiv 1 \pmod{q}$  et divise  $p^2$ . Comme ci-dessus,  $G$  étant simple, ce ne peut être 1. Ce ne peut-être ni  $p$  ni  $p^2$ . En effet, dans le cas contraire,  $p$  serait  $\equiv \pm 1 \pmod{q}$  et donc  $p \geq q-1$ . Comme  $p < q$ , la seule possibilité est  $p = q-1$  et donc  $p = 2$  et  $q = 3$ . Dans ce dernier cas, il y a 4 3-Sylow d'ordre 3 qui contiennent 8 éléments d'ordre 3. Ne reste de la place que pour un seul 2-Sylow qui devrait être distingué. Ce dernier cas n'est donc lui non plus pas possible.

Conclusion: il n'existe pas de groupe  $G$  simple d'ordre  $p^2q$ .

---

### Correction de l'exercice 19 ▲

(a) Le nombre de 19-Sylow de  $G$  est  $\equiv 1 \pmod{19}$  et divise 21; ce ne peut être que 1. Le groupe  $G$  a donc un unique 19-Sylow  $P$  qui est distingué.

(b) Comme  $P$  est distingué dans  $G$ ,  $N = PQ$  est un sous-groupe de  $G$ . De  $P \cap Q = \{1\}$ , on déduit que  $PQ/P \simeq Q$  et donc que  $PQ$  est d'ordre  $7 \cdot 19 = 133$ . D'après l'exercice 15, le groupe  $N$  est isomorphe au produit direct  $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ , lequel est isomorphe au groupe cyclique  $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$  par le lemme chinois.

(c) Le nombre de 7-Sylow de  $G$  est  $\equiv 1 \pmod{7}$  et divise 57. Les seules possibilités sont 1 et 57. Or ce n'est pas 1 non plus car on suppose que  $Q$  n'est pas distingué. Le groupe  $G$  admet donc 57 7-Sylow, et donc 57 sous-groupes cycliques d'ordre 133 par la question précédente. Ces 57 groupes d'ordre 133 sont bien distincts car deux 7-Sylow distincts engendrent avec  $P$  deux groupes cycliques d'ordre 133 distincts puisque le 7-Sylow est l'unique sous-groupe d'ordre 7 du groupe cyclique. Par conséquent leurs ensembles de générateurs sont deux à deux disjoints. On obtient ainsi  $57 \times \phi(133) = 57 \times 6 \times 18$  éléments d'ordre 133 dans  $G$  ( $\phi$  désigne ici la fonction indicatrice d'Euler), ce qui est manifestement absurde. On peut donc conclure que  $Q$  est distingué dans  $G$  et que l'unique sous-groupe cyclique  $N = PQ$  d'ordre 133 l'est aussi.

(d) Comme  $N$  est distingué dans  $G$ ,  $NR$  est un sous-groupe de  $G$ . De  $N \cap R = \{1\}$ , on déduit que  $NR/N \simeq R$  et donc que  $NR$  est d'ordre  $133 \cdot 3 = 399$ . Ainsi  $G = NR$  et l'isomorphisme précédent  $G/N \simeq R$  montre que l'inclusion  $R \rightarrow G$  est une section de la suite exacte  $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow R \rightarrow 1$ . Le groupe  $G$  est donc isomorphe au produit semi-direct du groupe cyclique  $N$  d'ordre 133 par le groupe cyclique  $R$  d'ordre 3.

---