Année 2020

QCM DE MATHÉMATIQUES - LILLE - PARTIE 2

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

Ces questions ont été écrites par Abdellah Hanani et Mohamed Mzari de l'université de Lille.

Ce travail a été effectué en 2019 dans le cadre d'un projet Liscinum porté par l'université de Lille et Unisciel.

Table des matières

Première partie
Algèbre

Systèmes d'équations linéaires

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

1 Systèmes d'équations linéaires

1.1 Systèmes d'équations linéaires | Niveau 1

Question 1
On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ x-y-z & = & 0 \\ 3x+2y+z & = & 0. \end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ 5y-2z & = & 0 \\ z & = & 0. \end{array}\right.$
- ☐ (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ (S) n'admet pas de solution.
- ☐ (S) admet une unique solution.

Question 2
On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 0 \\ -x+z & = & 0 \\ x+y & = & 0. \end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & x. \end{array}\right.$
- ☐ L'ensemble des solutions de (S) est une droite.
- ☐ (S) n'admet pas de solution.
- ☐ (S) admet une unique solution.

Question 3

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcr} x - y + 2z & = & 1 \\ -2x + 2y - 4z & = & -2 \\ 3x - 3y + 6z & = & 3. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow x - y + 2z = 1$.
- ☐ L'ensemble des solutions de (S) est un plan.
- ☐ (S) n'admet pas de solution.
- ☐ (S) admet une unique solution.

Question 4

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcr} x + y - z & = & 2 \\ -x + y + z & = & 0 \\ 2x + z & = & -1. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x + y - z & = & 2 \\ y & = & 1 \\ z & = & -1. \end{array} \right.$
- ☐ (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ (S) n'admet pas de solution.
- ☐ (S) admet une unique solution.

Question 5

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcr} x - y + z & = & 1 \\ 2x - 3y + 4z & = & 1 \\ y + z & = & 1. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x - y + z & = & 1 \\ y - 2z & = & 1 \\ z & = & 0. \end{array} \right.$

☐ Les équations de (S) sont celles de trois plans.
☐ (S) admet une unique solution.
☐ (S) n'admet pas de solution.

Question 6
On considère le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z &=& 1 \\ 2x-3y+4z &=& 1 \\ x-2y+3z &=& 1. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ $(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z &=& 1 \\ y-2z &=& 1. \end{array} \right.$
☐ (S) admet une infinité de solutions.
☐ (S) admet une unique solution.
☐ (S) n'admet pas de solution.

1.2 Systèmes d'équations linéaires | Niveau 2

Question 7
On considère le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ xy+z &=& 0 \\ x-y &=& -1. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ (S) est un système d'équations linéaires.
☐ $(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z &=& -2x \\ y &=& 1+x \\ xy+z &=& 0. \end{array} \right.$
☐ (S) admet une unique solution.
☐ (S) admet deux solutions distinctes.

Question 8
On considère le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ 2x+y-z &=& -1 \\ 3x+y-3z &=& -3 \\ x-2z &=& -2. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ y+3z &= 3. \end{cases}$

☐ L'ensemble des solutions de (S) est une droite.

☐ (S) n'admet pas de solution.

☐ (S) admet une unique solution.

1.3 Systèmes d'équations linéaires | Niveau 3

Question 9

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et de paramètres des réels a, b, c et d :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x+y &= a \\ y+z &= b \\ z+t &= c \\ t+x &= d. \end{cases}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= a \\ y+z &= b \\ z+t &= c. \end{cases}$

☐ (S) admet une solution si et seulement si $a+c=b+d$.

☐ (S) admet une solution si et seulement si $a+b=c+d$.

☐ Le rang de (S) est 3.

Question 10

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètres des réels non nuls et distincts a, b et c :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} ax+ay+bz &= b \\ bx+by+cz &= c \\ cx+cy+az &= a. \end{cases}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} ax+ay+bz &= b \\ (ac-b^2)z &= ac-b^2 \\ (a^2-bc)z &= a^2-bc. \end{cases}$

☐ (S) n'admet pas de solution.

☐ (S) admet une solution si et seulement si $a^2 \neq bc$.

☐ (S) admet une infinité de solutions.

Question 11

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre un réel m :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & -1 \\ x+2y+3z & = & 1 \\ 2x+3y+4z & = & m. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & -1 \\ y+2z & = & m. \end{array} \right.$
- ☐ Pour tout réel m, (S) admet une solution.
- ☐ Si $m = 1$, (S) n'admet pas de solution.
- ☐ Si $m = 0$, l'ensemble des solutions de (S) est une droite.

Question 12

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre un réel m :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x-y-z & = & 1 \\ -x+2y-mz & = & -3 \\ 2x-y+(m-1)z & = & 2m+2. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x-y-z & = & 1 \\ y-(m+1)z & = & -2 \\ (m+1)z & = & m+1. \end{array} \right.$
- ☐ Pour tout réel m, (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ Si $m = -1$, (S) n'admet pas de solution.
- ☐ Si $m \neq -1$, (S) admet une unique solution.

Question 13

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et de paramètres des réels a et m :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x-z-t & = & 0 \\ -x+y+z & = & a \\ 2x+y-z & = & m \\ x-mz-t & = & a \\ x+y+t & = & m. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x-z-t & = & 0 \\ y-t & = & a \\ z+3t & = & m-a \\ (1-m)z & = & a. \end{array} \right.$

☐ Si $m = 1$ et $a = 0$, (S) admet une unique solution.

☐ Si $m \neq 1$ et a un réel quelconque, (S) admet une unique solution.

☐ Si $m \neq 1$ et $a \neq 0$, (S) admet une infinité de solutions.

Question 14

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre un réel m :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + mz & = & 1 \\ x + my + z & = & 1 \\ mx + y + z & = & 1. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ $(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x + y + mz & = & 1 \\ (m-1)y + (1-m)z & = & 0 \\ (1-m)z & = & 1-m. \end{array} \right.$

☐ Si $m = 1$, (S) admet une infinité de solutions.

☐ Si $m = -2$, (S) n'admet pas de solution.

☐ Si $m \neq 1$, (S) admet une unique solution.

Question 15

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et de paramètre un réel m :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + mt & = & 1 \\ x + y + mz + t & = & 1 \\ x + my + z + t & = & 1 \\ mx + y + z + t & = & 1. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ $(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x + y + z + mt & = & 1 \\ (m-1)y + (1-m)t & = & 0 \\ (m-1)z + (1-m)t & = & 0 \\ (1-m)(3+m)t & = & 1-m. \end{array} \right.$

☐ Si $m = 1$, (S) admet une infinité de solutions.

☐ Si $m = -3$, (S) admet une unique solution.

☐ Si $m \neq 1$, (S) admet une unique solution.

Question 16

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètres des réels a, b et c :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + a^2 z & = & 0 \\ x + by + b^2 z & = & 0 \\ x + cy + c^2 z & = & 0. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ (S) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+ay+a^2z & = & 0 \\ (b-a)y+(b^2-a^2)z & = & 0 \\ (c-a)y+(c^2-a^2)z & = & 0. \end{array}\right.$

☐ Si a, b et c sont des réels deux à deux distincts, (S) admet une infinité de solutions.

☐ Si $a=b$ et $a \neq c$, (S) admet une unique solution.

☐ $b=c$ et $a \neq c$, (S) n'admet pas de solution.

Question 17

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et de paramètres des réels m et a :

$$(S) \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+mt & = & 1 \\ x+y+mz+t & = & a \\ x+my+z+t & = & a^2 \\ mx+y+z+t & = & a^3. \end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ (S) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+mt & = & 1 \\ (m-1)y+(1-m)t & = & a^2-1 \\ (m-1)z+(1-m)t & = & a-1 \\ (1-m)(3+m)t & = & a^3+a^2+a-m-2. \end{array}\right.$

☐ Si $m=1$, (S) admet une infinité de solutions.

☐ Si $m \neq 1$, (S) admet une unique solution.

☐ Si $m=-3$ et $a \neq -1$, (S) n'admet pas de solution.

Question 18

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètres des réels a et m :

$$(S) \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 2 \\ x-y+z & = & 4 \\ 3x+3y-z & = & 4m \\ mx-y+z & = & 2a+2. \end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ (S) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 4 \\ y-z & = & -2 \\ z & = & 2m \\ 0 & = & m-a. \end{array}\right.$

☐ Si $m=1$ et $a=-1$, (S) admet une unique solution.

☐ Si $m=a$, (S) admet une infinité de solutions.

☐ Si $m \neq a$, (S) n'admet pas de solution.

Question 19

Soit (S) un système à 3 équations linéaires et 2 inconnues et (S_H) le système homogène associé. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ (S_H) admet au moins une solution.
- ☐ (S) admet au moins une solution.
- ☐ Si X_1 et X_2 sont des solutions de (S), alors $X_1 + X_2$ est une solution de (S).
- ☐ (S) admet une infinité de solutions si et seulement si les équations de (S) sont celles de trois droites confondues.

Question 20

Soit (S) un système à 3 équations linéaires et 3 inconnues et (S_H) le système homogène associé. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ (S_H) admet une infinité de solutions.
- ☐ (S) admet une unique solution.
- ☐ Si X_1 et X_2 sont des solutions de (S), alors $X_1 - X_2$ est une solution de (S_H).
- ☐ (S) admet une infinité de solutions si et seulement si les équations de (S) sont celles de 3 plans confondus.

Question 21

Soit (S) un système d'équations linéaires et (S_E) un système échelonné obtenu par la méthode de résolution du pivot de Gauss. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ (S) admet une infinité de solutions si et seulement si toute équation de (S_E) dont le premier membre est nul a aussi son second membre nul.
- ☐ (S) n'admet pas de solution si et seulement s'il existe une équation de (S_E) ayant un premier membre nul et un second membre non nul.
- ☐ (S) admet une unique solution si et seulement si le nombre d'équations de (S_E) dont le premier membre est non nul est égal au nombre d'inconnues.
- ☐ Si le nombre d'équations de (S_E) dont le premier membre est non nul est strictement inférieur au nombre d'inconnues et les équations ayant un premier membre nul admettent aussi le second membre nul, alors (S) admet une infinité de solutions.

Question 22

Soit (S) un système à 4 équations et 3 inconnues, (S_E) un système échelonné obtenu par la méthode de résolution du pivot de Gauss et r le rang du système (S), c.à.d le nombre d'équations de (S_E) ayant un premier membre non nul. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si $r = 1$, alors (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ Si $r = 2$ et les équations ayant un premier membre nul admettent aussi le second membre nul, alors (S) admet une infinité de solutions.

- ☐ Si $r = 3$ et l'équation ayant un premier membre nul admet aussi le second membre nul, alors (S) admet une unique solution.
- ☐ Si $r = 3$, alors (S) admet une unique solution.

Question 23

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $\leqslant 3$ vérifiant les conditions :

$$P(1) = 1, \quad P(0) = 1, \quad P(-1) = -1 \quad \text{et} \quad P'(1) = 3.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Un tel polynôme P n'existe pas.
- ☐ Il existe une infinité de polynômes P vérifiant ces conditions.
- ☐ Il existe un unique polynôme P vérifiant ces conditions.
- ☐ Si P est un polynôme qui vérifie ces conditions, alors $P(2) = 2$.

1.4 Systèmes d'équations linéaires | Niveau 4

Question 24

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$:

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + a x_n & = & 1 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + a x_{n-1} + x_n & = & 1 \\ x_1 + x_2 + \cdots + a x_{n-2} + x_{n-1} + x_n & = & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n & = & 1, \end{array} \right.$$

où a est un paramètre réel. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + a x_n & = & 1 \\ (a-1)[x_{n-1} - x_n] & = & 0 \\ (a-1)[x_{n-2} - x_n] & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (a-1)[x_2 - x_n] & = & 0 \\ (1-a)[x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + (1+a)x_n] & = & 1-a. \end{array} \right.$
- ☐ Si $a = 1$, (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ Si $a \neq 1$, (S) admet une unique solution.
- ☐ $a = 1 - n$, (S) n'admet pas de solution.

Question 25

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$: et de paramètre des réels a, b :

$$(\mathrm{S})\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\dots \quad \dots+x_n &= 1 \\ ax_1+bx_2+bx_3+\dots+bx_n &= 1 \\ ax_1+ax_2+bx_3+\dots+bx_n &= 1 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ ax_1+\dots+ax_{n-1}+bx_n &= 1, \end{cases}$$

où a et b sont des paramètre réels. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+\dots+x_n &= 1 \\ (b-a)[x_2+x_3+\dots+x_n] &= 1-a \\ (b-a)[x_3+\dots+x_n] &= 1-a \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ (b-a)x_n &= 1-a. \end{cases}$
- ☐ Si $a=b$, (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ Si $a \neq b$, (S) n'admet pas de solution.
- ☐ (S) admet une infinité de solutions si et seulement si $a=b=1$.

Question 26

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $\leqslant 11$ vérifiant les conditions :

$$P(1)=1!, \quad P'(1)=2!, \quad P''(1)=3!, \dots, \quad P^{(10)}(1)=11!.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Un tel polynôme P n'existe pas.
- ☐ Il existe une infnité de polynômes P vérifiant ces conditions.
- ☐ Il existe un unique polynôme P vérifiant ces conditions.
- ☐ Si P est un polynôme qui vérifie ces conditions, alors $P(X)=1+2(X-1)+3(X-1)^2+\dots+11(X-1)^{10}+12(X-1)^{11}$.

yste

Espaces vectoriels

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

2 Espaces vectoriels

2.1 Espaces vectoriels | Niveau 1

Question 27
Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x + y = 1\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est un espace vectoriel, car E est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel, car $(0,0) \notin E$.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel, car $(1,0) \in E$, mais $(-1,0) \notin E$.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel, car $(1,0) \in E$ et $(0,1) \in E$, mais $(1,1) \notin E$.

Question 28
Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x - y + z = 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $(0,0,0) \in E$.
- ☐ E n'est pas stable par addition.
- ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ E est un espace vectoriel.

Question 29
Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x - y \geqslant 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est non vide.
- ☐ E est stable par addition.
- ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Question 30
Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x - y + z = x + y - 3z = 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est non vide.
- ☐ E n'est pas stable par addition.
- ☐ E est un espace vectoriel.
- ☐ $E = \{(x, 2x, x)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$.

2.2 Espaces vectoriels | Niveau 2

Question 31
Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ xy + xz + yz = 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $(0, 0, 0) \in E$.
- ☐ E n'est pas stable par addition.
- ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Question 32
Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ (x + y)(x + z) = 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x + y = x + z = 0\}$.
- ☐ $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x + y = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + z = 0\}$.
- ☐ $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x + y = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + z = 0\}$.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel, car E n'est pas stable par addition.

Question 33
Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ e^x e^y = 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x = y\}$.
- ☐ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x = -y\}$.
- ☐ $E = \{(0, 0)\}$.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel.

Question 34
Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ e^x e^y = 1\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x = y\}$.
- ☐ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x = -y\}$.
- ☐ E est vide.
- ☐ E est un espace vectoriel.

Question 35
Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ e^x - e^y = 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $E=\{(0,0)\}$.
- ☐ $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ x=y\geqslant 0\}$.
- ☐ $E=\{(x,x)\,;\ x\in\mathbb{R}\}$.
- ☐ E est un espace vectoriel.

Question 36
Soit E un espace vectoriel. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E peut être vide.
- ☐ Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F contient toute combinaison linéaire d'éléments de E.
- ☐ Il existe un sous-espace vectoriel de E qui contient un seul élément.
- ☐ Si F est un sous-ensemble non vide de E qui contient toute combinaison linéaire de deux vecteurs de F, alors F est un sous-espace vectoriel de E.

Question 37
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul et F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F\nsubseteq G$ et $G\nsubseteq F$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $F+G=\{x+y\,;\,x\in F \text{ et } y\in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- ☐ $F\cap G$ est sous-espace vectoriel de E.
- ☐ $F\cup G$ est sous-espace vectoriel de E.
- ☐ $F\times G=\{(x,y)\,;\,x\in F \text{ et } y\in G\}$ est un sous-espace vectoriel de $E\times E$.

Question 38
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles.
- ☐ Les sous-espaces vectoriels non nuls de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles et $\mathbb{R}^2$.
- ☐ Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont les plans vectoriels.
- ☐ Les sous-espaces vectoriels non nuls de $\mathbb{R}^3$ qui sont strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$ sont les droites vectorielles et les plans vectoriels.

2.3 Espaces vectoriels | Niveau 3

Question 39
Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2, muni des opérations usuelles et $E=\{P\in\mathbb{R}_2[X]\,;\ P(1)=1\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est vide.

- ☐ E est stable par addition.
- ☐ E n'est pas stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel.

Question 40
Soit n un entier $\geqslant 1$ et $E = \{P \in \mathbb{R}[X]\,;\, \deg P = n\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $0 \in E$.
- ☐ E est stable par addition.
- ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel.

Question 41
Soit n un entier $\geqslant 1$ et $E = \{P \in \mathbb{R}[X]\,;\, \deg P < n\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $0 \notin E$.
- ☐ E est stable par addition.
- ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel.

2.4 Espaces vectoriels | Niveau 4

Question 42
Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La fonction nulle appartient à E.
- ☐ E est stable par addition.
- ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ E est un espace vectoriel.

Question 43
Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La fonction nulle n'appartient pas à E.
- ☐ E est stable par addition.
- ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel.

Question 44
Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\, f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(1) = 1\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La fonction nulle n'appartient pas à E.
- ☐ E est stable par addition.
- ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel.

Question 45
Soit $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\, f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(1) = 0\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La fonction nulle appartient à E.
- ☐ E est stable par addition.
- ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel.

Question 46
Soit $E = \left\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,;\, f \text{ est continue sur } [0,1] \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 1\right\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La fonction nulle appartient à E.
- ☐ E est stable par addition.
- ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel.

Question 47
Soit $E = \left\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,;\, f \text{ est continue sur } [0,1] \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0\right\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La fonction nulle appartient à E.
- ☐ E est stable par addition.
- ☐ E n'est pas stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ E est un espace vectoriel.

Question 48
On considère $E = (\mathbb{R}^*)^2$ muni de l'addition et la multiplication par un réel suivantes :

$$(x, y) + (x', y') = (xx', yy') \quad \text{et} \quad \lambda.(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ L'élément neutre pour l'addition est $(0, 0)$.
- ☐ L'inverse, pour l'addition, de (x, y) est $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.
- ☐ E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Question 49
On considère $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et la multiplication par un réel suivantes :

$$(x, y) + (x', y') = (x + y', x' + y) \quad \text{et} \quad \lambda.(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est stable par addition et par multiplication par un scalaire.
- ☐ L'addition est commutative.
- ☐ L'élément neutre pour l'addition est $(0, 0)$.
- ☐ E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Question 50
On considère $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et la multiplication par un réel suivantes :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad \lambda.(x, y) = (\lambda x, y).$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est stable par addition et multiplication par un scalaire.
- ☐ L'élément neutre pour l'addition est $(0, 0)$.
- ☐ La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition.
- ☐ E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Question 51
On considère $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et la multiplication par un réel suivantes :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad \lambda.(x, y) = (\lambda^2 x, \lambda^2 y).$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ L'élément neutre pour l'addition est $(0, 0)$.
- ☐ La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition.
- ☐ L'addition dans $\mathbb{R}$ est distributive par rapport à la multiplication définie ci-dessus.
- ☐ E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2.5 Base et dimension | Niveau 1

Question 52
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,-1)$ et $u_3 = (-1,0,-1)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre.
- ☐ $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ u_3 est une combinaison linéaire de u_1 et u_2.
- ☐ $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Question 53
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (-1,1,0)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre.
- ☐ $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ u_2 est une combinaison linéaire de u_1 et u_3.
- ☐ $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Question 54
Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y - z = 0\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim E = 3$.
- ☐ $\dim E = 2$.
- ☐ $\dim E = 1$.
- ☐ $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$ est une base de E.

2.6 Base et dimension | Niveau 2

Question 55
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u_1 = (-1,1,2), \quad u_2 = (0,1,1), \quad u_3 = (-1,0,1), \quad u_4 = (0,2,1).$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Le rang de la famille $\{u_1, u_2\}$ est 2.
- ☐ Le rang de la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est 3.
- ☐ Le rang de la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est 4.
- ☐ Le rang de la famille $\{u_1, u_2, u_4\}$ est 3.

Question 56

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1, 1)$ et $u_3 = (1, -1, a, b)$, où a et b sont des réels. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, u_3 \notin \text{Vect}\{u_1, u_2\}$.
- ☐ $\exists\, a, b \in \mathbb{R}, u_3 \in \text{Vect}\{u_1, u_2\}$.
- ☐ $u_3 \in \text{Vect}\{u_1, u_2\}$ si et seulement si $a = -3$ et $b = -2$.
- ☐ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre.

Question 57

Dans $\mathbb{R}_1[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 1$, on considère les polynômes $P_1 = X + 1, P_2 = X - 1, P_3 = 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre.
- ☐ $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$.
- ☐ $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
- ☐ $\{P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

Question 58

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$, on considère les polynômes $P_1 = X, P_2 = X(X + 1), P_3 = (X + 1)^2$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre.
- ☐ $\{P_1 + P_2, P_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ☐ $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ☐ $\{P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Question 59

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$, on considère les polynômes $P_1 = 1-X, P_2 = 1+X, P_3 = X^2$ et $P_4 = 1+X^2$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Le rang de la famille $\{P_4\}$ est 4.
- ☐ Le rang de la famille $\{P_3, P_4\}$ est 2.
- ☐ Le rang de la famille $\{P_2, P_3, P_4\}$ est 2.
- ☐ Le rang de la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est 3.

Question 60

Soit $E\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\, x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est un espace vectoriel de dimension 0.

- ☐ E est un espace vectoriel de dimension 1.
- ☐ E est un espace vectoriel de dimension 2.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel.

Question 61
Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\, |x + y|e^{z+t} = 0\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est un espace vectoriel de dimension 1.
- ☐ E est un espace vectoriel de dimension 2.
- ☐ E est un espace vectoriel de dimension 3.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel.

Question 62
Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ y - x + z = 0 \text{ et } x = 2y\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{(2, 1, 1)\}$ est une base de E.
- ☐ $\dim E = 3$.
- ☐ E est un plan.
- ☐ $E = \mathrm{Vect}\{(2, 1, 1)\}$.

Question 63
Soit $E = \{(x + z, z, z)\,;\, x, z \in \mathbb{R}\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ est une base de E.
- ☐ $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ est une base de E.
- ☐ $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ est une base de E.
- ☐ $\dim E = 3$.

2.7 Base et dimension | Niveau 3

Question 64
Dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, on considère les polynômes $P_1 = X^3 + 1, P_2 = P_1'$ (la dérivée de P_1) et $P_3 = P_1''$ (la dérivée seconde de P_1). Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Le rang de la famille $\{P_1, P_3\}$ est 3.
- ☐ $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.
- ☐ $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.
- ☐ Le rang de la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est 3.

Question 65

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 etv_1, v_2, v_3 des vecteurs linéairement indépendants de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille génératrice de E.
- ☐ $\{v_1, v_2, v_1 + v_3\}$ est une base de E.
- ☐ $\{v_1 - v_2, v_1 + v_3\}$ est une base de E.
- ☐ $\{v_1 - v_2, v_1 + v_3\}$ est famille libre de E.

Question 66

Soit $E\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\,(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = 0\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est un espace vectoriel de dimension 0.
- ☐ E est un espace vectoriel de dimension 1.
- ☐ E est un espace vectoriel de dimension 2.
- ☐ E n'est pas un espace vectoriel.

Question 67

Soit n un entier $\geqslant 3$ et $E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,;\,x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim E = n - 1$.
- ☐ $\dim E = n$.
- ☐ $\dim E = 1$.
- ☐ $E = \mathbb{R}$.

Question 68

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (-1, 1, 1)$, $u_3 = (1, -1, 0)$ et on considère les sous-espaces vectoriels $E = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$ et $F = \mathrm{Vect}\{u_3\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est un plan vectoriel.
- ☐ Une équation cartésienne de E est $x + 2y + z = 0$.
- ☐ F est une droite vectorielle.
- ☐ Une équation cartésienne de F est $z = 0$.

Question 69
On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$. Soit

$$E = \{P \in \mathbb{R}_2[X]\,;\, P(1) = P'(1) = 0\},$$

où P' est la dérivée de P. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{X-1\}$ est une base de E.
- ☐ $\{(X-1)^2\}$ est une base de E.
- ☐ $\dim E = 2$.
- ☐ $\dim E = 1$.

Question 70
Soit $E = \{P = aX^3 + b(X^3-1)\,;\, a, b \in \mathbb{R}\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim E = 3$.
- ☐ $\{1, X^3\}$ est une base de E.
- ☐ $\{X^3-1\}$ est une base de E.
- ☐ $\dim E = 1$.

Question 71
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{1\}$ est une base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ☐ $\{\sqrt{2}\}$ est une base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ☐ $\{1, \sqrt{2}\}$ est une base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ☐ $\{1, \sqrt{2}\}$ est une base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Question 72
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{1\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ☐ $\{i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- ☐ $\{i, 1+i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ☐ 1 et i sont $\mathbb{C}$ linéairement indépendants.

Question 73
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{(1,0),(1,1)\}$ est une base de $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- ☐ La dimension de $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel est 4.
- ☐ $\{(1,0),(0,i),(i,0),(0,1)\}$ est une base de $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ☐ La dimension de $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel est 2.

2.8 Base et dimension | Niveau 4

Question 74
Soit n et p deux entiers tels que $n > p \geqslant 1$, E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, et $v_1, v_2, \dots, v_p$ des vecteurs linéairement indépendants de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ est une base de E.
- ☐ Il existe des vecteurs $u_1, \dots, u_k$ de E tels que $\{v_1, v_2, \dots, v_p, u_1, \dots, u_k\}$ soit une base de E.
- ☐ $\{v_1, v_2, \dots, v_{p-1}\}$ est une famille libre de E.
- ☐ $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ est une famille génératrice de E.

Question 75
On considère les fonctions réelles f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = \sin x \cos x$$

et E l'espace engendré par ces fonctions. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{f_1, f_2\}$ est une base de E.
- ☐ $\{f_1, f_3\}$ est une base de E.
- ☐ $\dim E = 2$.
- ☐ $\dim E = 3$.

Question 76
Soit n un entier $\geqslant 2$. On considère les fonctions réelles $f_1, f_2, \dots, f_n$, définies par :

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{2x}, \quad \dots, \quad f_n(x) = e^{nx}$$

et E l'espace vectoriel engendré par ces fonctions. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est un espace vectoriel de dimension $n-2$.
- ☐ E est un espace vectoriel de dimension $n-1$.
- ☐ E est un espace vectoriel de dimension n.
- ☐ E est un espace vectoriel de dimension infinie.

2.9 Espaces vectoriels supplémentaires | Niveau 1

Question 77
On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$E = \mathrm{vect}\{u_1, u_2, u_3\}, \text{ où } u_1 = (1, -1, 0, 1),\ u_2 = (1, 0, 1, 0),\ u_3 = (3, -1, 1, 2)$$

et

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x + y - z = 0 \text{ et } y + z = 0\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim E = 3$.
- ☐ $\dim E \cap F = 1$.
- ☐ $E + F = \mathbb{R}^4$.
- ☐ E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Question 78
On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x + y = y + z = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x + y + z + t = 0\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim E = 1$.
- ☐ $\dim F = 3$.
- ☐ $\dim E \cap F = 1$.
- ☐ E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Question 79
On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x - y = y - z = t = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, z = x + y\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim E = 1$.
- ☐ $\dim F = 2$.
- ☐ $\dim E \cap F = 1$.
- ☐ E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

2.10 Espaces vectoriels supplémentaires | Niveau 2

Question 80
Dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,;\, P(0) = P(1) = 0\} \text{ et } F = \{(P \in \mathbb{R}_3[X] \,;\, P'(0) = P''(0) = 0\},$$

où P' (resp. P'') est la dérivée première (resp. seconde) de P. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim E = 3$.
- ☐ $\dim F = 1$.
- ☐ $E + F = \mathbb{R}_3[X]$.

☐ E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Question 81
Dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels :

$$E = \{P = a(X-1)^2 + b(X-1) + c \ ; \ a, b, c \in \mathbb{R}\} \ \text{ et } \ F = \{P = aX^3 + bX^2 \ ; \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ $\dim E = 2$.

☐ $\dim E \cap F = 1$.

☐ E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

☐ $E + F = \mathbb{R}_3[X]$.

2.11 Espaces vectoriels supplémentaires | Niveau 3

Question 82
Dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ ; \ P(-X) = P(X)\} \ \text{ et } \ F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ ; \ P(-X) = -P(X)\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ $\dim E = 2$.

☐ $\dim F = 3$.

☐ $\dim E \cap F = 1$.

☐ E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Applications linéaires

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

3 Applications linéaires

3.1 Applications linéaires | Niveau 1

Question 83
On considère les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sin x \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (y,x). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $f(0) = 0$.
- ☐ f est une application linéaire.
- ☐ $g(x,y) = g(y,x)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- ☐ g est une application linéaire.

Question 84
On considère les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (x,y^2) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (x,-x). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $f(0,2) = (0,4)$.
- ☐ f est une application linéaire.
- ☐ $g(0,0) = (0,0)$.
- ☐ g est une application linéaire.

Question 85
On considère les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \to & (x+y, x-z) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \to & (xy, xz). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $f(0,0,0) = (0,0)$.
- ☐ f est une application linéaire.
- ☐ $g(1,1,0) = g(1,0,0) + g(0,1,0)$.
- ☐ g est une application linéaire.

3.2 Applications linéaires | Niveau 2

Question 86

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. On considère les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \to & P(0) + P'(0) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \to & 1 + P' + XP'', \end{array}$$

où P' (resp. P'') est la dérivée première (resp. seconde) de P. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $f(0) = 1$.
- ☐ f est une application linéaire.
- ☐ $g(0) = 1$.
- ☐ g est une application linéaire.

Question 87

On considère les applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & \mathrm{Re}(z) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & \mathrm{Im}(z), \end{array}$$

où $\mathrm{Re}(z)$ (resp. $\mathrm{Im}(z)$) est la partie réelle (resp. imaginaire) de z. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est $\mathbb{C}$-linéaire.
- ☐ f est $\mathbb{R}$-linéaire.
- ☐ g est $\mathbb{R}$-linéaire.
- ☐ g est $\mathbb{C}$-linéaire.

Question 88

On considère les applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & |z| \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & \overline{z}, \end{array}$$

où $|z|$ (resp. $\overline{z}$) est le module (resp. le conjugué) de z. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est $\mathbb{C}$-linéaire.
- ☐ f est $\mathbb{R}$-linéaire.
- ☐ g est $\mathbb{R}$-linéaire.
- ☐ g est $\mathbb{C}$-linéaire.

3.3 Applications linéaires | Niveau 3

Question 89
On considère les deux applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & |x+y| \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & \big(\max(x,y), \min(x,y)\big). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $f(1,-1) = 0$.
- ☐ f est une application linéaire.
- ☐ $g(0,0) = (0,0)$.
- ☐ g est une application linéaire.

Question 90
On considère les applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \to & (x-y, y+2z+a) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \to & (ax+b)(x+y). \end{array}$$

où a et b sont des réels. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est une application linéaire.
- ☐ f est une application linéaire si et seulement si $a = 0$.
- ☐ g est une application linéaire si et seulement si $a = b = 0$.
- ☐ g est une application linéaire si et seulement si $a = 0$.

Question 91
On considère les applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \to & (z, x+ax^2) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \to & (z+a\sin x, y+be^x, c|x|+1). \end{array}$$

où a, b et c sont des réels. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est une application linéaire.
- ☐ f est une application linéaire si et seulement si $a = 0$.
- ☐ g est une application linéaire si et seulement si $a = b = c = 0$.
- ☐ Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, g n'est pas une application linéaire.

Question 92
On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. On considère les deux applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \to & R \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \to & Q, \end{array}$$

où R (resp. Q) est le reste (resp. le quotient) de la division euclidienne de P par X^3+1. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $f(0)=0$.
- ☐ f est une application linéaire.
- ☐ $g(0)=0$.
- ☐ g n'est pas une application linéaire.

3.4 Applications linéaires | Niveau 4

Question 93
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire si et seulement s'il existe un réel a tel que $f(x)=ax$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels a et b tels que $f(x,y)=(ax,by)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- ☐ Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels a,b,c et d tels que $f(x,y)=(ax+by,cx+dy)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- ☐ Une application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels a,b et c tels que $f(x,y,z)=(ax,by,cz)$, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

3.5 Noyau et image | Niveau 1

Question 94
Soit E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\ker f$ peut-être vide.
- ☐ $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.
- ☐ $0_E \in \operatorname{Im} f$.
- ☐ $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Question 95
Soit E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est injective si et seulement si $\ker f$ est vide.
- ☐ f est injective si et seulement si $\ker f$ est une droite vectorielle.
- ☐ f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.
- ☐ f est bijective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

3.6 Noyau et image | Niveau 2

Question 96
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^5$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si $\ker f = \{(0,0,0)\}$, alors f est surjective.
- ☐ Si $\ker f$ est une droite vectorielle, alors $\operatorname{Im} f$ est un plan vectoriel.
- ☐ f est injective si seulement si $\dim \operatorname{Im} f = 3$.
- ☐ f est bijective si et seulement si $\ker f = \{(0,0,0)\}$.

Question 97
On considère l' application linéaire :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \to & (x-z, y+z, x+y). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{(1,-1,1)\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ f est injective.
- ☐ $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
- ☐ f est surjective.

Question 98
On considère l' application linéaire :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \to & (x-y, y-z, x+z). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim \ker f = 1$.
- ☐ f est injective.
- ☐ $\dim \operatorname{Im} f = 3$.
- ☐ f n'est pas bijective.

Question 99
On considère l' application linéaire :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \to & (x+y+z, x+y-z). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim \ker f = 1$.

- ☐ f est injective.
- ☐ $\mathrm{rg}(f) = 1$.
- ☐ f n'est pas bijective.

Question 100
On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(e_1) = e_3$, $f(e_2) = e_1 + e_2$, $f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{e_1 + e_2 - e_3\}$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$.
- ☐ $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$.
- ☐ $\{e_1 + e_2 - e_3\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ $\dim \ker f = 2$.

3.7 Noyau et image | Niveau 3

Question 101
On considère l' application linéaire :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \to & P', \end{array}$$

où $\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$ et P' est la dérivée de P. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{1\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ $\{1, X\}$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$.
- ☐ $\{0, 1, X\}$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$.
- ☐ f est surjective.

Question 102
On considère l'application linéaire :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \to & XP' - X^2P'', \end{array}$$

où $\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$ et P' (resp. P'') est la dérivée première (resp. seconde) de P. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{1 + X^2\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ $\{1, X^2\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ $\{1 + X\}$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$.
- ☐ $\mathrm{rg}(f) = 1$.

Question 103
On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \to & R, \end{array}$$

où R est le reste de la division euclidienne de P par $(X+1)^3$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{X^3\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ $\dim \ker f = 1$.
- ☐ $\{1+X+X^2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
- ☐ $\operatorname{rg}(f) = 3$.

Question 104
On considère $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, muni de sa base canonique $\mathscr{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$f(1) = X,\ f(X) = 1+X,\ f(X^2) = (X-1)^2,\ f(X^3) = (X-1)^3.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim \ker f = 1$.
- ☐ f est injective.
- ☐ f n'est pas injective.
- ☐ $\operatorname{rg}(f) = 4$.

Question 105
Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies et f une application linéaire de E dans F. On pose $\dim E = n$ et $\dim F = m$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si f est injective, alors $n \leqslant m$.
- ☐ Si $n \leqslant m$, alors f est injective.
- ☐ Si f est surjective, alors $n \geqslant m$.
- ☐ Si $n \geqslant m$, alors f est surjective.

Question 106
Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies tels que $\dim E = \dim F = n$ et f une application linéaire de E dans F. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si $\dim \ker f = 0$, alors $\dim \operatorname{Im} f < n$.
- ☐ si f est injective, alors f est surjective.
- ☐ Si $\dim \operatorname{Im} f < n$, alors $\dim \ker f > 0$.

- ☐ si f est surjective, alors f est injective.

Question 107
Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies et f une application linéaire de E dans F. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si f est injective, alors f est surjective.
- ☐ Si f est surjective, alors f est injective.
- ☐ Si $\dim E = \dim F$, alors f est bijective.
- ☐ Si f est bijective, alors $\dim E = \dim F$.

Question 108
Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{F} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ une famille de vecteurs de E et $\mathscr{F}' = \{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_k)\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si $\mathscr{F}$ est une famille libre, alors $\mathscr{F}'$ est une famille libre.
- ☐ Si $\mathscr{F}$ est une famille libre et f est injective, alors $\mathscr{F}'$ est une famille libre.
- ☐ Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathscr{F}'$ est une famille génératrice de F.
- ☐ Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E et f est surjective, alors $\mathscr{F}'$ est une famille génératrice de F.

3.8 Noyau et image | Niveau 4

Question 109
On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que : $f^2 + f + Id = 0$, où Id est l'application identité de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim \ker f = 1$.
- ☐ f est injective.
- ☐ f est bijective et $f^{-1} = f^2$.
- ☐ f est bijective et $f^{-1} = -f - Id$.

Question 110
Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E et f l'application de E dans E définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \to & E \\ x = x_1 + x_2,\ (x_1 \in F, x_2 \in G) & \to & x_1. \end{array}$$

f est appelée la projection vectorielle de E sur F parallèlement à G. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est un endomorphisme de E.
- ☐ $f^2 = 0$.
- ☐ $f^2 = f$.
- ☐ $F = \operatorname{Im} f$ et $G = \ker f$.

Question 111
Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E et f l'application de E dans E définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \rightarrow & E \\ x = x_1 + x_2,\ (x_1 \in F, x_2 \in G) & \rightarrow & x_1 - x_2. \end{array}$$

f est appelée la symétrie vectorielle de E par rapport à F parallèlement à G. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est un endomorphisme de E.
- ☐ $f^2 = f$.
- ☐ $f^2 = Id$, où Id est l'identité de E.
- ☐ $F = \{x \in E \ ; \ f(x) = x\}$ et $G = \{x \in E \ ; \ f(x) = -x\}$.

Question 112
Soit E un espace vectoriel et f un projecteur de E, c.à.d. un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$. On notera Id l'identité de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est injective.
- ☐ $Id - f$ est un projecteur de E.
- ☐ $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.
- ☐ $\operatorname{Im} f = \ker(Id - f)$.

Question 113
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme nilpotent de E, c.à.d. un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $n \geqslant 2$, vérifiant $f^n = 0$. On notera Id l'identité de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est injective.
- ☐ f est surjective.
- ☐ $Id - f$ est injective.
- ☐ $Id - f$ est bijective.

Question 114
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme involutif de E, c.à.d. un endomorphisme non nul de E tel que $f^2 = Id$, où Id est l'identité de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est bijective.
- ☐ $\mathrm{Im}(Id+f)\cap\mathrm{Im}(Id-f)=E$.
- ☐ $E=\mathrm{Im}(Id+f)+\mathrm{Im}(Id-f)$.
- ☐ $\mathrm{Im}(Id+f)$ et $\mathrm{Im}(Id-f)$ ne sont pas supplémentaires dans E.

Question 115
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si $f^2=0$, alors $f=0$.
- ☐ Si $f^2=0$, alors f est bijective.
- ☐ Si $f^2=0$, alors $\mathrm{Im} f\subset\ker f$.
- ☐ Si $\mathrm{Im} f\subset\ker f$, alors $f^2=0$.

Question 116
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $E=\ker f\oplus\mathrm{Im} f$.
- ☐ Si $\ker f=\ker f^2$, alors $E=\ker f\oplus\mathrm{Im} f$.
- ☐ Si $\mathrm{Im} f=\mathrm{Im} f^2$, alors $\ker f=\ker f^2$.
- ☐ Si $E=\ker f\oplus\mathrm{Im} f$, alors $\ker f=\ker f^2$.

Calcul matriciel

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

---

4 Calcul matriciel

4.1 Calcul matriciel | Niveau 1

Question 117
Soit A et B deux matrices. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si la matrice $A+B$ est définie, alors $B+A$ est définie.
- ☐ Si la matrice $A+B$ est définie, alors AB est définie.
- ☐ Si la matrice AB est définie, alors BA est définie.

- ☐ Si la matrice $A+B$ est définie, alors A^tB est définie, où ${}^tB$ est la transposée de la matrice B.

Question 118
On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } E=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $2A-B=C$.
- ☐ $AB=D$.
- ☐ $BA=E$.
- ☐ $AB=BA$.

Question 119
On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $A+B=B$.
- ☐ $AB=\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $CA=\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $CD=E$.

Question 120
On considère $M_{n,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition usuelle et la multiplication par un scalaire. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $M_{n,m}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
- ☐ $\dim M_{n,m}(\mathbb{R})=mn$.
- ☐ $\dim M_{n,m}(\mathbb{R})=m+n$.
- ☐ $M_{n,m}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

4.2 Calcul matriciel | Niveau 2

Question 121
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $2A + 3B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 13 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
- ☐ $BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 122
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On notera ${}^tM$ la transposée d'une matrice M. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $A + {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
- ☐ $B\,{}^tB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $A\,{}^tC = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $C\,{}^tD = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 123
Soit A, B et C des matrices d'ordre $n \geqslant 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \,\text{ou}\, B = 0$.

- ☐ $A(BC) = (AC)B$.
- ☐ $A(B+C) = AC + AB$.
- ☐ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Question 124

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice identité. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $A^2 = 2A$.
- ☐ $A^n = 2^n A$, pour tout entier $n \geqslant 1$.
- ☐ $(A-I)^{2n} = I$, pour tout entier $n \geqslant 1$.
- ☐ $(A-I)^{2n+1} = A + I$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Question 125

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Le rang de A est 3.
- ☐ Le rang de B est 1.
- ☐ Le rang de C est 3.
- ☐ Le rang de D est 3.

Question 126

Soit $E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E n'est pas un espace vectoriel.
- ☐ E est un esapce vectoriel de dimension 1.
- ☐ E est un esapce vectoriel de dimension 4.
- ☐ E est un esapce vectoriel de dimension 2.

Question 127

Soit $E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ b-c & b-a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E n'est pas un espace vectoriel.

- ☐ E est un espace vectoriel de dimension 3.
- ☐ E est un espace vectoriel de dimension 2.
- ☐ E est un espace vectoriel de dimension 4.

Question 128
Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et f l'application définie par :

$$\begin{array}{cccc} f: & M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ & M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \to & {}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \end{array}$$

où ${}^tM$ est la transposée de M. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est une application linéaire.
- ☐ $\dim \ker f = 1$.
- ☐ $\dim \ker f = 0$.
- ☐ $\dim \operatorname{Im} f = 3$.

4.3 Calcul matriciel | Niveau 3

Question 129
Soit A une matrice de rang r. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ A admet r vecteurs colonnes linéairement indépendants.
- ☐ A admet r vecteurs lignes linéairement indépendants.
- ☐ Toute famille contenant r vecteurs colonnes de A est libre.
- ☐ Toute famille contenant r vecteurs lignes de A est libre.

Question 130
Soit $E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est stable par addition.
- ☐ E est stable par multiplication de matrices.
- ☐ la multiplication de matrices de E n'est pas commutative.
- ☐ Soit $M \in \mathbb{R}_2(\mathbb{R})$. Si $MM' = M'M$, $\forall M' \in E$, alors $M \in E$.

Question 131
Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et f l'application définie par :

$$\begin{array}{cccc} f: & M_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \to & \operatorname{tr}(M) = a + d, \end{array}$$

le réel $\mathrm{tr}(M)$ est appelée la trace de M. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est une application linéaire.
- ☐ $\dim\ker f = 3$.
- ☐ $\dim\mathrm{Im} f = 2$.
- ☐ $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$.

Question 132

Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et f l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ & M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \to & M - {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}, \end{array}$$

${}^tM$ est la transposée de M. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est une application linéaire.
- ☐ $\dim\ker f = 3$.
- ☐ $\dim\mathrm{Im} f = 2$.
- ☐ $\dim\mathrm{Im} f = 3$.

4.4 Calcul matriciel | Niveau 4

Question 133

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $N = A - aI$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $N^k = 0$, pour tout entier $k \geqslant 3$.
- ☐ On ne peut pas appliquer la formule du binôme pour le calcul de A^n.
- ☐ Pour tout entier $n \geqslant 2$, $A^n = a^n I + na^{n-1}N + \dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}N^2$.
- ☐ Pour tout entier $n \geqslant 2$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2} \\ 0 & a^n & 2na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$.

Question 134

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = A - I$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère 3 suites récurrentes $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définies par u_0, v_0, w_0 des réels donnés et pour $n \geqslant 1$:

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcc} u_n & = & u_{n-1}+2v_{n-1}+3w_{n-1} \\ v_n & = & v_{n-1}+2w_{n-1} \\ w_n & = & w_{n-1}. \end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $N^k = 0$, pour tout entier $k \geqslant 2$.
- ☐ Pour tout entier $n \geqslant 2$, $A^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$.
- ☐ Pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcc} u_n & = & u_0+2nv_0+3nw_0 \\ v_n & = & v_0+2nw_0 \\ w_n & = & w_0. \end{array}\right.$$

- ☐ Pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcc} u_n & = & u_0+2nv_0+n(2n+1)w_0 \\ v_n & = & v_0+2nw_0 \\ w_n & = & w_0. \end{array}\right.$$

Question 135

On note $M_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit

$$E = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid^t M = M\} \quad \text{et} \quad F = \{M \in M_2(\mathbb{R})\ ;\ {}^tM = -M\},$$

où ${}^tM$ désigne la transposée de M. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est un espace vectoriel de dimension 3.
- ☐ E est un espace vectoriel de dimension 2.
- ☐ F est un espace vectoriel de dimension 1.
- ☐ E et F sont supplémentaires dans $M_2(\mathbb{R})$.

Question 136

Dans $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, on considère la famille $\mathscr{B}' = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, où

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\mathscr{B}'$ est une famille libre de $M_2(\mathbb{R})$.
- ☐ $\mathscr{B}'$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

- ☐ $\mathrm{Vect}\mathscr{B}' = M_2(\mathbb{R})$.
- ☐ $\dim \mathrm{Vect}\mathscr{B}' = 3$.

Question 137
On considère $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l' application linéaire définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \to & AM - MA. \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim \ker f = 2$.
- ☐ f est injective.
- ☐ $\mathrm{rg}(f) = 2$.
- ☐ f est surjective.

4.5 Inverse d'une matrice | Niveau 1

Question 138
Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels et I la matrice identité. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B telle que $AB = I$.
- ☐ A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B telle que $BA = I$.
- ☐ A est inversible si et seulement si les coefficients de A sont inversibles pour la multiplication dans $\mathbb{R}$.
- ☐ A est inversible si et seulement si pour toute matrice Y à une colonne et n lignes, il existe une matrice X à une colonne et n lignes telle que $AX = Y$.

4.6 Inverse d'une matrice | Niveau 2

Question 139
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ A est inversible.
- ☐ B est inversible.

☐ B est inversible et $B^{-1} = C$.
☐ C est inversible.

Question 140
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?
☐ A est inversible.
☐ B est inversible.
☐ C est inversible.
☐ D est inversible.

Question 141
Soit A une matrice inversible. On notera ${}^tA$ la transposée de A. Quelles sont les assertions vraies ?
☐ $3A$ est inversible.
☐ ${}^tA$ est inversible.
☐ $A{}^tA$ est inversible.
☐ $A+{}^tA$ est inversible.

Question 142
Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et I la matrice identité. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ vérifiant $A^m = I$. Quelles sont les assertions vraies ?
☐ A est inversible et $A^{-1} = A^{m-1}$.
☐ Le rang de A est n.
☐ A n'est pas inversible.
☐ Si $m = 2$, A est inversible et $A^{-1} = A$.

4.7 Inverse d'une matrice | Niveau 3

Question 143
On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ A est inversible.
- ☐ A^2 est inversible.
- ☐ $A^3 + A^2$ est inversible.
- ☐ $A + {}^tA$ est inversible, où ${}^tA$ est la transposée de A.

Question 144

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée. On rappelle les définitions suivantes :

. A est dite diagonale si tous les coefficients $a_{i,j}$, avec $i \neq j$ sont nuls.

. A est dite symétrique si pour tous i, j, $a_{i,j} = a_{j,i}$.

. A est dite triangulaire inférieurement (resp. supérieurement) si pour tous $i < j$, $a_{i,j} = 0$ (resp. pour tous $i > j$, $a_{i,j} = 0$).

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si A est diagonale, A est inversible si et seulement s'il existe un coefficient $a_{i,i}$ non nul.
- ☐ Si A est diagonale, A est inversible si et seulement si tous les coefficients $a_{i,i}$ sont non nuls.
- ☐ A est symétrique si ${}^tA = A$, où ${}^tA$ est la transposée de A.
- ☐ Si A est triangulaire inférieurement, A est inversible.

Question 145

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre $n \geqslant 1$. On notera ${}^tA$ la transposée de A et $\mathrm{rg}(A)$ le rang de A. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.
- ☐ Si A est inversible, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^{-1})$.
- ☐ $\mathrm{rg}(A+B) = \max\big(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\big)$.
- ☐ $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(BA)$.

Question 146

On considère $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et A et B deux matrices non nulles telles que $AB = 0$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $A = 0$ ou $B = 0$.
- ☐ A est inversible.
- ☐ B est inversible.
- ☐ A n'est pas inversible.

Question 147
On considère $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et A, B et C trois matrices non nulles deux à deux distinctes telles que $AB = AC$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $B = C$.
- ☐ $A = 0$.
- ☐ A n'est pas inversible.
- ☐ Le rang de A est n.

4.8 Inverse d'une matrice | Niveau 4

Question 148
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Le rang de A est 1.
- ☐ A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A + A^{-1})^n = (2^n \cos^n x)I$, où I est la matrice identité.
- ☐ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = \begin{pmatrix} \cos(nx) & -\sin(nx) \\ \sin(nx) & \cos(nx) \end{pmatrix}$.

Question 149
Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et I la matrice identité. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ vérifiant : $A^m + A^{m-1} + \cdots + A + I = 0$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ A est inversible et $A^{-1} = A^m$.
- ☐ A est inversible et $A^{-1} = -(A^{m-1} + \cdots + A + I)$.
- ☐ Le rang de A est n.
- ☐ A n'est pas inversible.

Question 150
Soit A une matrice nilpotente, c.à.d il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $A^n = 0$. On notera I la matrice identité. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ A est inversible.
- ☐ A est inversible et $A^{-1} = A^{n-1}$.
- ☐ Il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que $A - aI$ n'est pas inversible.
- ☐ Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $A - aI$ est inversible.

Applications linéaires et matrices

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

5 Applications linéaires et matrices

5.1 Matrice d'une application linéaire | Niveau 1

Question 151
On considère $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ munis de leurs bases canoniques et f l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & y-x. \end{array}$$

La matrice de f relativement aux bases canoniques est :

- ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 152
On considère $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ munis de leurs bases canoniques et f l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \to & (x,-x). \end{array}$$

La matrice de f relativement aux bases canoniques est :

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 153
On considère $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ munis de leurs bases canoniques et f l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \to & (y,x,-y). \end{array}$$

La matrice de f relativement aux bases canoniques est :

- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 154
On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique et f l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \to & (2x+y,4x-3y). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La matrice de f dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.
- ☐ La matrice de f dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.
- ☐ f est injective.
- ☐ f est bijective.

Question 155
On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique et f l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \to & (x+y,x-z,y+z). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La matrice de f dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ La matrice de f dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ Le rang de f est 2.

☐ Le rang de f est 3.

Question 156

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ et la base $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2\}$, où $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (2,3)$. On notera P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ $Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 157

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et la base $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$, où $u_1 = (1,1,-1), u_2 = (0,2,1)$ et $u_3 = (0,1,1)$. On notera P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

☐ P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 158
Soit A une matrice inversible d'ordre $n \geqslant 1$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ f est bijective.

☐ Le noyau de f est une droite vectorielle.

☐ Le rang de f est n.

☐ Le rang de A est n.

5.2 Matrice d'une application linéaire | Niveau 2

Question 159
Dans $\mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$, on considère la base canonique $\mathscr{B} = \{1, X, X^2\}$ et la base $\mathscr{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$, où $P_1 = X$, $P_2 = 1-X$ et $P_3 = (1-X)^2$. On notera P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ La matrice de l'application identité de $\mathbb{R}_2[X]$ de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 160
Soit $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (0,1,1)$, $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,-1)$ et f l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \to & (x+y, x-z). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- ☐ La matrice de f par rapport aux bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$ est : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ La matrice de f par rapport aux bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$ est :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Question 161
On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathscr{B}$ et f l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \to & (y+z, x+z, x+y). \end{array}$$

Soit $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$, où $u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ La matrice de f de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 162
On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathscr{B}$ et f l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \to & (x+z, 2x+2z, -x-z). \end{array}$$

Soit $u_1 = (0,1,0), u_2 = (1,2,-1)$ et $u_3 = (1,0,0)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{u_1,u_2,u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ $\{u_1,u_2\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- ☐ La matrice de f dans la base $\{u_1,u_2,u_3\}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 163

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$, muni de sa base canonique $\mathscr{B} = \{1, X, X^2\}$ et f l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \to & XP', \end{array}$$

où P' est la dérivée de P. Soit $\mathscr{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$, où $P_1 = 1+X, P_2 = 1-X, P_3 = (1+X)^2$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ☐ La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ La matrice de f de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Question 164

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2\}$, où $u_1 = (3,1), u_2 = (1,-1)$, une base de $\mathbb{R}^2$. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et B La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

☐ $A^n = 2^{n-2}\begin{pmatrix} 3+(-1)^n & 3-3(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1+3(-1)^n \end{pmatrix}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

5.3 Matrice d'une application linéaire | Niveau 3

Question 165

On considère $\mathbb{R}_3[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, muni de sa base canonique notée $\mathscr{B}$ et f l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \to & R, \end{array}$$

où R est le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$. Soit $\mathscr{B}' = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, où $P_1 = 1$, $P_2 = 1-X$, $P_3 = (1-X)^2$ et $P_4 = X(1-X)^2$. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

☐ La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Question 166

On considère $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$ et $\mathbb{R}^3$ munis de leurs bases canoniques notées respectivement $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}$. Soit f l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \to & \big(P(0), P(1), P(-1)\big). \end{array}$$

On considère la base $\mathscr{B}_2 = \{P_1, P_2, P_3\}$, où $P_1 = 1, P_2 = 1+X, P_3 = 1+X^2$. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ La matrice de f de la base $\mathscr{B}_1$ à la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ La matrice de f de la base $\mathscr{B}_1$ à la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ La matrice de f de la base $\mathscr{B}_2$ à la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

☐ La matrice de f de la base $\mathscr{B}_2$ à la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 167

Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles engendré par les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par : $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos x$ et $f_3(x) = \sin x$. On munira $\mathscr{F}$ des bases $\mathscr{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ et $\mathscr{B}' = \{f_1, f_2 + f_3, f_2 - f_3\}$. On notera P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ La matrice de l'application identité de $\mathscr{F}$ de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Question 168

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim\ker(f - Id) = 2$ et $\dim\ker(f - 2Id) = 1$.
- ☐ $\dim\ker(f - Id) = 1$ et $\dim\ker(f - 2Id) = 2$.
- ☐ Il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ Il existe une matrice C inversible telle que : $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 169

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Soit $a \in \mathbb{R}$. $A - aI$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $a \neq 4$.
- ☐ $\mathrm{rg}(A) = 3$ et $\mathrm{rg}(A - 4I) = 2$.
- ☐ $\dim\ker f = 2$ et $\dim\ker(f - 4Id) = 1$.
- ☐ Il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Question 170

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim\ker(f + Id) = \dim\ker(f - 2Id) = \dim\ker(f - 3Id) = 1$.
- ☐ $\dim\ker(f + Id) = \dim\ker(f - 2Id) = 1$ et $\dim\ker(f - 3Id) = 2$.
- ☐ Il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est : $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- ☐ L'application $(f + Id)o(f - 2Id)o(f - 3Id)$ est nulle.

Question 171
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Soit $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (0,1,1)$ et $\mathscr{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$. On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\dim \ker(f^2 - Id) = 1$.
- ☐ $\{v_2\}$ est une base de $\ker(f^2 + Id)$.
- ☐ $\mathbb{R}^3 = \ker(f^2 - Id) \oplus \ker(f^2 + Id)$.
- ☐ $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de f^2 dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Question 172
Soit A une matrice à coefficients réels, à 3 lignes et 4 colonnes. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ A est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ dans des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
- ☐ A est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dans des bases de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
- ☐ A est la matrice d'une application linéaire de noyau nul.
- ☐ A est la matrice d'une application linéaire bijective.

Question 173
Soit A une matrice à coefficients réels, à 4 lignes et 3 colonnes. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ A est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ dans des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
- ☐ A est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dans des bases de de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
- ☐ A est la matrice d'une application linéaire de rang 4.
- ☐ A est la matrice d'une application linéaire bijective.

5.4 Matrice d'une application linéaire | Niveau 4

Question 174

On considère $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles engendré par les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par : $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = e^x$ et $f_3(x) = xe^x$. Soit ϕ l'application linéaire définie :

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathscr{F} & \to & \mathscr{F} \\ & f & \to & f + f' - f'', \end{array}$$

où f' (resp. f'') est la dérivée première (resp. seconde) de f. On notera M la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ Le rang de la matrice M est 2.
- ☐ ϕ est bijective.
- ☐ M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 175

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f^2 = 0$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\operatorname{Im} f \subset \ker f$.
- ☐ $\operatorname{Im} f = \ker f$.
- ☐ Le rang de f est 2.
- ☐ Il existe une base de E dans laquelle le matrice de f est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où a est un réel non nul.

Question 176

On considère $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni des deux bases $\mathscr{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ et $\mathscr{B}' = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, où

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On notera P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ La matrice de l'application identité de $M_2(\mathbb{R})$ de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 177

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$, où $u_1 = (0,1,-1), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,1,1)$, une base de $\mathbb{R}^3$. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et B la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 1-2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Question 178

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$, où $u_1 = (0,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,0,-1)$, une base de $\mathbb{R}^3$. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et B la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ f est bijective.

☐ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 0 & 1-(-1)^n \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-(-1)^n & 0 & 1+(-1)^n \end{pmatrix}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Question 179

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}' = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, où

$$a_1 = (1,0,0,0),\ a_2 = (0,1,1,0),\ a_3 = (0,1,-1,0),\ a_4 = (0,1,1,-1).$$

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$, $(w_n)_{n\geqslant 0}$ et $(k_n)_{n\geqslant 0}$ des suites récurrentes définies par la donnée des réels u_0, v_0, w_0, k_0 et pour $n \geqslant 1$:

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ccc} u_n & = & u_{n-1} \\ v_n & = & v_{n-1} - w_{n-1} + k_{n-1} \\ w_n & = & -v_{n-1} + w_{n-1} + k_{n-1} \\ k_n & = & -k_{n-1}. \end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{a_2\}$ est une base de $\ker(f - Id)$ et $\{a_1\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ $\{a_4\}$ est une base de $\ker(f - 2Id)$ et $\{a_3\}$ est une base de $\ker(f + Id)$.
- ☐ $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et la matrice de f dans cette base est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- ☐ Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ccc} u_n & = & u_0 \\ v_n & = & 2^{n-1}v_0 - 2^{n-1}w_0 + (-1)^{n-1}k_0 \\ w_n & = & -2^{n-1}v_0 + 2^{n-1}w_0 + (-1)^{n-1}k_0 \\ k_n & = & (-1)^n k_0. \end{array}\right.$$

Question 180

On considère $\mathbb{R}_3[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, muni de sa base canonique $\mathscr{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$f(1) = 1,\ f(X) = X - X^2,\ f(X^2) = -X + X^2,\ f(X^3) = X + X^2 + 2X^3.$$

On note A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. Soit $P_1 = X + X^2, P_2 = 1, P_3 = X + X^3, P_4 = X^2 + X^3$ et $\mathscr{B}' = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\{P_2\}$ est une base de $\ker f$ et $\{P_1\}$ est une base de $\ker(f - Id)$.
- ☐ $\{P_3, P_4\}$ est une base de $\ker(f - 2Id)$.
- ☐ $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et la matrice de f dans cette base est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- ☐ $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & -2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & -2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Deuxième partie
Analyse

Primitives

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

6 Primitives des fonctions réelles

6.1 Primitives | Niveau 1

Question 181
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Si u est une fonction dérivable, strictement positive, alors $\sqrt{u}$ est une primitive de $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- ☐ Si u est une fonction dérivable, alors $\arctan(u)$ est une primitive de $\dfrac{u'}{1+u^2}$.
- ☐ Si u est une fonction dérivable, alors e^u est une primitive de e^u.
- ☐ Si u est une fonction dérivable et ne s'annulant pas, alors $\ln(u)$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$.

Question 182
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $F(x) = x^2 + e^{x^2}$ est une primitive de $f(x) = 2x + e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $F(x) = x^2 + \dfrac{e^{2x}}{2}$ est une primitive de $f(x) = 2x + e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $F(x) = x^2 e^x$ est une primitive de $f(x) = 2xe^x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $F(x) = (2x-2)e^x$ est une primitive de $f(x) = 2xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

Question 183
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $F(x)=\sqrt{x+1}+\mathrm{e}^x$ est une primitive de $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\mathrm{e}^x$ sur $]-1,+\infty[$.
- ☐ $F(x)=2\sqrt{x+1}+\mathrm{e}^x$ est une primitive de $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\mathrm{e}^x$ sur $]-1,+\infty[$.
- ☐ La primitive de $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\mathrm{e}^x$ sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0 est $F(x)=\sqrt{x+1}+\mathrm{e}^x-2$.
- ☐ La primitive de $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\mathrm{e}^x$ sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0 est $F(x)=2\sqrt{x+1}+\mathrm{e}^x-3$.

Question 184

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $F(x)=(x+1)^2+\cos(2x)$ est une primitive de $f(x)=2x+2-2\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $F(x)=x^2+2x-\cos(2x)$ est une primitive de $f(x)=2x+2-2\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $F(x)=2x^2\cos(x^2)$ est une primitive de $f(x)=4x\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $F(x)=-2x\cos(2x)+\sin(2x)$ est une primitive de $f(x)=4x\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Question 185

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Une primitive de $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos x$.
- ☐ Une primitive de $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)$.
- ☐ Une primitive de $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x-\cos x)$.
- ☐ Une primitive de $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-x}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Question 186

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies. Sur $]0,+\infty[$, on a :

- ☐ $\displaystyle\int\left(\frac{2}{x}+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x=\frac{-2}{x^2}+2\mathrm{e}^{2x}+k$, où $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int\left(\frac{2}{x}+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x=\ln(x^2)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+k$, où $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sin x\right)\mathrm{d}x=\sqrt{x}+\cos x+k$, où $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sin x\right)\mathrm{d}x=\sqrt{x}-\cos x+k$, où $k\in\mathbb{R}$.

Question 187
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies. Sur $]-1,+\infty[$, on a :

- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3} = \frac{-3}{(x+1)^4} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3} = \frac{-1}{2(x+1)^2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln(x+1) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \frac{-1}{(x+1)^2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 188
Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Une primitive de $\cos(\pi x) + \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ est $\sin(\pi x) + \ln x$.
- ☐ Une primitive de $\cos(\pi x) + \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ est $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi} + \ln(\pi x)$.
- ☐ La primitive de $\cos(\pi x) + \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 est $\sin(\pi x) + \ln x$.
- ☐ La primitive de $\cos(\pi x) + \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 est $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi} + \ln x$.

Question 189
On note par F une primitive de $f(x) = x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $F(x) = x\ln x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $F(x) = x\mathrm{e}^x - \displaystyle\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.
- ☐ $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 190
On note par F une primitive de $f(x) = \ln x$ sur $]0,+\infty[$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $F(x) = \mathrm{e}^x + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $F(x) = x\ln x - \displaystyle\int \mathrm{d}x$.
- ☐ $F(x) = x\ln x - x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

☐ $F(x) = \dfrac{1}{x} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

6.2 Primitives | Niveau 2

Question 191

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ Sur $]-1, +\infty[$, on a : $\displaystyle\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ Sur $]-1, +\infty[$, on a : $\displaystyle\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{x^3}{3(1+x^3)} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ Sur $]1, +\infty[$, on a : $\displaystyle\int \sqrt{x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ Sur $]1, +\infty[$, on a : $\displaystyle\int \sqrt{x-1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 192

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $\displaystyle\int 4x^3(2+x^4)^3 \mathrm{d}x = x^4(2+x^4)^3 + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ $\displaystyle\int 4x^3(2+x^4)^3 \mathrm{d}x = \frac{(2+x^4)^4}{4} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ $\displaystyle\int \frac{6x\mathrm{d}x}{1+3x^2} = 6\int x\mathrm{d}x \times \int \frac{\mathrm{d}x}{1+3x^2} = 3x^2 \times \ln(1+3x^2) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

☐ $\displaystyle\int \frac{6x\mathrm{d}x}{1+3x^2} = \ln(1+3x^2) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 193

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $\displaystyle\int 4x\sqrt{2x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2x^2+1)^{3/2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ $\displaystyle\int \sqrt{2x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2x^2+1)^{3/2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ $\displaystyle\int \frac{3x\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2+2}} = \sqrt{3x^2+2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{3x^2+2}} = \sqrt{3x^2+2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 194
Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Les primitives de $16x^3(x^4+1)^3$ sur $\mathbb{R}$ sont données par $F(x) = x^4(x^4+1)^4 + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Les primitives de $16x^3(x^4+1)^3$ sur $\mathbb{R}$ sont données par $F(x) = (x^4+1)^4 + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Les primitives de $\dfrac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}$ sur $\mathbb{R}$ sont données par $F(x) = 2\sqrt{x^4+1} + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Les primitives de $\dfrac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}$ sur $\mathbb{R}$ sont données par $F(x) = \dfrac{x^4}{\sqrt{x^4+1}} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Question 195
Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\displaystyle\int \left(e^{3x} + \frac{1}{1+4x^2}\right) dx = e^{3x} + \arctan(2x) + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \left(e^{3x} + \frac{1}{1+4x^2}\right) dx = \frac{e^{3x}}{3} + \frac{\arctan(2x)}{2} + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \left(e^{3x} + \frac{4}{1+x^2}\right) dx = \frac{e^{3x}}{3} + 4\arctan x + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \left(e^{3x} + \frac{4}{1+x^2}\right) dx = e^{3x} + 4\arctan x + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Question 196
Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Sur $]0,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{dx}{x} \ln x = \ln x \times \ln x + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Sur $]0,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln x \times \ln x + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Sur $]1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Sur $]1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(x \ln x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Question 197
Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Sur $]1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{-1}{\ln x} + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Sur $]1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \ln(x \ln^2 x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

- ☐ Sur $]1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{\sqrt{\ln x}}{2} + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Sur $]1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x\sqrt{\ln x}} = \sqrt{\ln x} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Question 198

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}(1+x^2)^{3/2} + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Question 199

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{(1+x^2)} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \ln\sqrt{1+x^2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(1+x^2)} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 200

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $u = x(1+x^4)$ donne $\displaystyle\int 4x^3(1+x^4)^3\mathrm{d}x = \int 4u^3\mathrm{d}u$.
- ☐ Le changement de variable $u = 1+x^4$ donne $\displaystyle\int 4x^3(1+x^4)^3\mathrm{d}x = \int u^3\mathrm{d}u$.
- ☐ Le changement de variable $u = 2x$ donne $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.
- ☐ Le changement de variable $u = 2x$ donne $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

Question 201
On note par F une primitive de $f(x) = x\ln x$ sur $]0,+\infty[$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int x\mathrm{d}x$.
- ☐ $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x}{2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 202
Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\displaystyle\int x\cos(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(1+x^2) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin(2+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \times \int \sin(2+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$.
- ☐ $\displaystyle\int x\cos(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\sin(1+x^2) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin(2+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = -\cos(2+\mathrm{e}^x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 203
Le changement de variable $u = \sqrt{x}$ donne :

- ☐ $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \cos(u) + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \sin(u)\mathrm{d}u$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = -2\cos(u) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Question 204
Le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$ donne :

- ☐ $\displaystyle\int \frac{\sin(1/x)}{x^2}\mathrm{d}x = -\int \sin(u)\mathrm{d}u$.

- ☐ $\displaystyle\int \frac{\sin(1/x)}{x^2}\mathrm{d}x = \cos(1/x) + k,\ k \in \mathbb{R}.$
- ☐ $\displaystyle\int \sin(1/x)\mathrm{d}x = \int \sin(u)\mathrm{d}u.$
- ☐ $\displaystyle\int \sin(1/x)\mathrm{d}x = -\cos(u) + k,\ k \in \mathbb{R}.$

Question 205
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\displaystyle\int \cos x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2 x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \cos x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos^2 x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \cos x \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3 x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \cos^2 x \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin^4 x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 206
Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $u = \cos x$ donne $\displaystyle\int \cos^3 x \mathrm{d}x = \int u^3 \mathrm{d}u$.
- ☐ Le changement de variable $u = \sin x$ donne $\displaystyle\int \cos^3 x \mathrm{d}x = \int (1-u^2)\mathrm{d}u$.
- ☐ Le changement de variable $u = \sin x$ donne $\displaystyle\int \sin^3 x \mathrm{d}x = \int u^3 \mathrm{d}u$.
- ☐ Le changement de variable $u = \cos x$ donne $\displaystyle\int \sin^3 x \mathrm{d}x = \int (u^2-1)\mathrm{d}u$.

6.3 Primitives | Niveau 3

Question 207
Le changement de variable $u = 2 + \cos x$ donne :

- ☐ $\displaystyle\int \sin x(2+\cos x)^5 \mathrm{d}x = -\frac{(2+\cos x)^6}{6} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int (2+\cos x)^5 \mathrm{d}x = \frac{((2+\cos x)^5)^6}{6} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ $\displaystyle\int \sin x\,(2+\cos x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{(2+\cos x)^{-2}}{2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ $\displaystyle\int (2+\cos x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{(2+\cos x)^{-2}}{2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 208

Le changement de variable $u = 2+\sin x$ donne :

☐ $\displaystyle\int \cos x\, \mathrm{e}^{2+\sin x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2+\sin x} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2+\sin x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u$.

☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u}$.

☐ $\displaystyle\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2+\sin x} = \ln(2+\sin x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 209

Le changement de variable $u = \sin x$ donne :

☐ $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

☐ $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \arctan(u) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \arctan(u) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Question 210

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $\displaystyle\int \cos(2x)\sqrt{1+\sin(2x)}\mathrm{d}x = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{1+\sin(2x)}} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ $\displaystyle\int \cos(2x)\sqrt{1+\sin(2x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[1+\sin(2x)\right]^{3/2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ $\displaystyle\int \frac{\sin(3x)\mathrm{d}x}{2-\cos(3x)} = \frac{1}{3}\ln\left[2-\cos(3x)\right] + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\cos(3x)} = \ln\left[2-\cos(3x)\right] + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Question 211

Le changement de variable $u = \mathrm{e}^x$ donne :

- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \arctan(u) + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \arctan(u) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Question 212

On se place sur $]0, +\infty[$. Le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-x}$ donne

- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}} = -\arcsin(u) + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}} = \int \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}} = \sqrt{(1-u^2)} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Question 213

On note par F une primitive de $f(x) = \arcsin(x)$ sur $]-1, 1[$. Parmi les propositions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $F(x) = x\arcsin(x) - \displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- ☐ $F(x) = \arccos(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $F(x) = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 214

On note par F une primitive de $f(x) = \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$. Parmi les propositions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $F(x) = x\arctan(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

- ☐ $F(x) = x\arctan(x) - \displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$.
- ☐ $F(x) = x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 215

On se place sur $]-1,+\infty[$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\displaystyle\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x+1} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1) - \int \mathrm{d}x$.
- ☐ $\displaystyle\int x\ln(1+x)\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \times \ln(1+x) = \frac{x^2}{2}\ln(1+x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int x\ln(1+x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{2(1+x)}$.

Question 216

Soit $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ f admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
- ☐ La fonction F telle que $F(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- ☐ La fonction F telle que $F(x) = \dfrac{\pi}{4} - \arctan\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- ☐ La primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est définie par $F(x) = \dfrac{\pi}{4} - \arctan\left(\mathrm{e}^{x}\right)$.

Question 217

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- ☐ L'égalité $x^2 = (x^2-1)+1$ donne : $\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.
- ☐ Une primitive de $\sqrt{1-x^2}$ sur $]-1,1[$ est $\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin(x)$.

Question 218

On pose $t = \cos x$ pour $x \in]0,\pi[$. Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$.
- ☐ $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $\dfrac{2}{t^2-1} = \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Question 219

On note par F une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \dfrac{1}{2+4x^2-4x}$. Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $f(x) = \dfrac{1}{1+(2x-1)^2}$.
- ☐ $F(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ avec $u = 2x-1$.
- ☐ $F(x) = \arctan(2x-1) + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $F(x) = \dfrac{1}{2}\arctan(2x-1) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Question 220

On note par F une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}$. Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2} + \dfrac{1}{x^2+2x+2}$.
- ☐ $F(x) = \ln(x^2+2x+2) + \dfrac{1}{x^2+2x+2} + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $F(x) = \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x^2+2x+2) + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $F(x) = \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

6.4 Primitives | Niveau 4

Question 221

Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $x = \sin t$ pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ donne :

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \cos t\,\mathrm{d}t.$$

☐ Le changement de variable $x = \sin t$ pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ donne :

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

☐ $\displaystyle\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} + k = \frac{t}{2} - \frac{\sin t\cos t}{2} + k,\ k \in \mathbb{R}.$

☐ Une primitive de $\sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$ est $\displaystyle\frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$.

Question 222

Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose $t = x^2$. Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 - 2} = \int \frac{\sqrt{t}\mathrm{d}t}{t^2 - t - 2}.$

☐ $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 - 2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - t - 2}.$

☐ $\displaystyle\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,2\},\ \frac{3}{t^2-t-2} = \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+1}$ et $\displaystyle\int \frac{3\,\mathrm{d}t}{t^2-t-2} = \ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right| + k,\ k \in \mathbb{R}.$

☐ $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 - 2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2+1}\right| + k,\ k \in \mathbb{R}.$

Question 223

Le changement de variable $t = x^2$, pour $x \in]0, +\infty[$, donne :

☐ $\displaystyle\int \frac{2\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}.$

☐ $\displaystyle\int \frac{2\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)^2}.$

☐ $\displaystyle\int \frac{2\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)^2}.$

☐ $\displaystyle\int \frac{2\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}.$

Question 224

Pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, on pose $t = \tan(x)$ et on rappelle que $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $\displaystyle\frac{1}{1+\sin^2 x} = \frac{1+t^2}{1+2t^2}$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{1+t^2}{1+2t^2}\mathrm{d}t.$

☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t) + k,\ k \in \mathbb{R}.$

☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{1}{1+2t^2}\mathrm{d}t.$

☐ Sur $]-\pi/2,\pi/2[$, on a : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) + k,\ k \in \mathbb{R}.$

Question 225

Pour $x \in]-\pi/2,\pi/2[$, on pose $t = \cos x$. Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $\displaystyle\int \frac{\tan x \mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \tan x \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \tan x.\arctan(\cos x) + k,\ k \in \mathbb{R}.$

☐ $\displaystyle\int \frac{\tan x \mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2)}.$

☐ $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \displaystyle\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{t}$ et donc $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2)} = \ln\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\right) + k,\ k \in \mathbb{R}.$

☐ Sur $]-\pi/2,\pi/2[$, on a : $\displaystyle\int \frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \ln\left(\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}\right) + k,\ k \in \mathbb{R}.$

Question 226

Le changement de variable $t = \sin x$ donne :

☐ $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x \mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \cos^3 x \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$

☐ $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x \mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \cos^3 x.\arctan(\sin x) + k,\ k \in \mathbb{R}.$

☐ $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x \mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$

☐ $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x \mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = -t + 2\arctan t + k,\ k \in \mathbb{R}.$

Question 227

On se place dans l'intervalle $]-\pi,\pi[$ et on rappelle que $\cos x = \dfrac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$ et que $\sin x = \dfrac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$. Le changement de variable $t = \tan(x/2)$ donne :

☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{3+t^2}.$

- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} \ln(t^2+t+1) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Question 228

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $t = \sqrt{x}$ donne $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1} + \int \frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{t^2+1} + \arctan t + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Une primitive de $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)^2}$ sur $]0,+\infty[$ est $\displaystyle\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \arctan\sqrt{x}\right)$.

Question 229

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $t = \sqrt{x}$ donne $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x-1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$.
- ☐ $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $\displaystyle\frac{4}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2}$.
- ☐ $\displaystyle\int \frac{4\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2} = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{2t}{t^2-1} + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Une primitive de $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)^2}$ sur $]1,+\infty[$ est $\displaystyle\ln\left|\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right| - \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$.

Question 230

Soient a et b deux réels et f la fonction telle que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{ax^2+b}}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Si a et b sont strictement positifs, il existe une constante C telle que $F(x) = C \arcsin\left(x\sqrt{a/b}\right)$ soit une primitive de $f(x)$.
- ☐ Si a et b sont strictement positifs, il existe une constante C telle que $F(x) = C\sqrt{ax^2+b}$ soit une primitive de $xf(x)$.
- ☐ Si a est strictement négatif et b est strictement positif, il existe une constante C telle que $F(x) = C \arcsin\left(x\sqrt{-a/b}\right)$ soit une primitive de $f(x)$.

- [ ] Si a est strictement positif et b est strictement négatif, il existe une constante C telle que $F(x) = C \arcsin\left[x\sqrt{a/(-b)}\right]$ soit une primitive de $f(x)$.

Calculs d'intégrales

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

7 Calculs d'intégrales

7.1 Calculs d'intégrales | Niveau 1

Question 231

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- [ ] $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(1+1)^2} - \frac{1}{(0+1)^2} = -\frac{3}{4}$.
- [ ] $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \frac{1}{1+1} - \frac{1}{0+1} = -\frac{1}{2}$.
- [ ] $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}} = 2(\sqrt{2}-1)$.
- [ ] $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$.

Question 232

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- [ ] $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2-1$.
- [ ] $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.
- [ ] $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln 2$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \ln 3$.
- [ ] $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

Question 233
Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos x\mathrm{d}x.$

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \pi + \int_0^{\pi} \cos x\mathrm{d}x.$

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \pi - 2.$

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \pi.$

Question 234
Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x.$

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x.$

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = 2.$

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = -2.$

Question 235
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\mathrm{d}t = \Big[t\ln t\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}t.$

☐ $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\mathrm{d}t = 1.$

☐ $\displaystyle\int_1^{2} t\ln t\mathrm{d}t = \Big[t^2\ln t\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} t\mathrm{d}t.$

☐ $\displaystyle\int_1^{2} t\ln t\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^2+1}{2}.$

Question 236
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $\displaystyle\int_0^{1} x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \Big[x\mathrm{e}^x\Big]_0^{1} - \int_0^{1} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$

- ☐ $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = 1.$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x.$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1.$

7.2 Calculs d'intégrales | Niveau 2

Question 237

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $t = \pi - x$ donne $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x.$
- ☐ Le changement de variable $t = 2x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \frac{\mathrm{d}t}{2}.$
- ☐ Le changement de variable $t = 2x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \sin t \, \frac{\mathrm{d}t}{2}.$
- ☐ Le changement de variable $t = 2x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \mathrm{d}t.$

Question 238

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $t = \ln x$ donne $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} t \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}.$
- ☐ Le changement de variable $t = 1 - x^2$ donne $\displaystyle\int_0^1 2x\mathrm{e}^{1-x^2} \mathrm{d}x = -\int_0^1 \mathrm{e}^t \mathrm{d}t.$
- ☐ Le changement de variable $t = 1 + \mathrm{e}^x$ donne $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} \mathrm{d}x = \ln 2.$
- ☐ Pour tout réel $a > 0$, on a : $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{1 + \cos^2 x} = 0.$

Question 239

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $t = \ln x$ donne $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1.$

- ☐ Le changement de variable $t = x^2+1$ donne $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{4}{5}$.
- ☐ Le changement de variable $t = x^2+1$ donne $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = 1$.
- ☐ Le changement de variable $t = \cos x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = 1$.

Question 240

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}$.
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.
- ☐ $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e}$.
- ☐ $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2+\sin x} = \ln 3$.

Question 241

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \tan x\,\mathrm{d}x$ est égale à :

- ☐ $\dfrac{4}{3}$.
- ☐ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
- ☐ $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x\,\mathrm{d}x$.
- ☐ $\dfrac{1}{2}\ln 3$.

Question 242

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}\,t = \frac{-5}{4}$.
- ☐ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\dfrac{x}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$, et donc $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} - \ln 2$.

- ☐ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^{1/2} = \arctan(1/2)$.
- ☐ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \Big[\arctan(-x)\Big]_0^{1/2} = \arctan(-1/2)$.

Question 243

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $t = \sin x$ donne $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x \tan x} = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2}$.
- ☐ $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$.
- ☐ Le changement de variable $t = \cos x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin x \mathrm{e}^{\cos x} \mathrm{d}\,x = \int_1^{1/2} \mathrm{e}^t \mathrm{d}\,t$.
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin x \mathrm{e}^{\cos x} \mathrm{d}\,x = \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}$.

Question 244

Soit $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$.
- ☐ $\displaystyle\frac{1}{5}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x < \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x < \int_0^2 x\,\mathrm{d}x$.
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- ☐ $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln 5$.

7.3 Calculs d'intégrales | Niveau 3

Question 245

On note $I = \displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$ et $J = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$. Le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$ donne :

- ☐ $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{12}$.

☐ $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln 2.$

☐ $J = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 3 - \ln 2.$

☐ $J = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = 2\ln 2 - \ln 3.$

Question 246

On note $I = \int_0^2 x^2 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $I \leqslant 4\int_0^2 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x.$

☐ $I \geqslant \ln 3 \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x.$

☐ $I = \frac{8}{3}\ln 3 + \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x+1}.$

☐ $I = 3\ln 3 - \frac{8}{9}.$

Question 247

On pose $I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ Le changement de variable $t = 1-x^2$ donne $I = -\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}.$

☐ Le changement de variable $t = 1-x^2$ donne $I = \int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}.$

☐ Le changement de variable $t = x^2$ donne $I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t}}.$

☐ Le changement de variable $x = \sin t$ donne $I = \int_0^{\pi/4} \sin t\,\mathrm{d}t.$

Question 248

On pose $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$ et $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $I = J$.
- ☐ $I = \dfrac{1}{J}$.
- ☐ $I = \dfrac{1}{2}\ln 3$.
- ☐ $J = -\ln\sqrt{3}$.

Question 249

On pose $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1+2\sin x}$, $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)\,\mathrm{d}x}{1+2\sin x}$ et $I = I_1 + I_2$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $I = 1$.
- ☐ $I_1 = 2\ln 3$.
- ☐ $I_1 = \dfrac{1}{2}\ln 3$.
- ☐ $I_2 = 1 - 2\ln 3$.

Question 250

On note $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)\mathrm{d}x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ En écrivant $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, on obtient : $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sin(2x)}$.
- ☐ Le changement de variable $t = \cos(2x)$ donne $I = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2}$.
- ☐ $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $\dfrac{2}{1-t^2} = \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t}$ et $\displaystyle\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $I = \ln 3$.

Question 251

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$, $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Une intégration par parties donne : $K = \dfrac{1}{2}$.
- ☐ $I + J = \dfrac{\pi^2}{8}$ et $I - J = K$.

- ☐ $I = \dfrac{\pi^2+4}{16}$.
- ☐ $J = \dfrac{\pi^2-4}{16}$.

Question 252
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $t = \sin x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$.
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\sqrt{3}$.
- ☐ Le changement de variable $t = \cos x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{\cos x} = \int_1^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{\cos x} = 1$.

Question 253
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $t = \sin x$ donne $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x\cos x} = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}\,t}{t(1-t^2)}$.
- ☐ $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, $\dfrac{1}{t(1-t^2)} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{1}{1+t}$.
- ☐ Une primitive de $\dfrac{1}{t(1-t^2)}$ sur $]0,1[$ est $F(t) = \ln\dfrac{t}{1-t^2}$.
- ☐ $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x\cos x} = \ln\sqrt{3}$.

Question 254
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $t = \cos x$ donne
$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos x)} = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)(1+t)^2}.$$
- ☐ $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $\dfrac{4}{(1-t)(1+t)^2} = \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{2}{(1+t)^2}$.
- ☐ Une primitive de $\dfrac{1}{(1-t)(1+t)^2}$ sur $]-1,1[$ est $\ln\dfrac{1+t}{1-t} - \dfrac{2}{1+t}$.

☐ $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos x)} = \ln 3 + \frac{2}{3}$.

Question 255
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La dérivée de $\tan x$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ est $1+\tan^2 x$.
- ☐ Le changement de variable $t = \tan x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{1+2\cos^2 x} = \int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2}$.
- ☐ Une primitive de $\dfrac{1}{3+t^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{1}{3}\arctan\left(\dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)$.
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{1+2\cos^2 x} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$.

Question 256
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $t = \cos x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \int_1^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2)}$.
- ☐ $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{t(1+t^2)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{1+t^2}$.
- ☐ Une primitive de $\dfrac{1}{t(1+t^2)}$ sur $]0, +\infty[$ est $\ln\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$.
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \frac{1+\ln 5}{2}$.

Question 257
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $t = \sqrt{x+1}$ donne $\displaystyle\int_3^8 \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x+1}} = \int_2^3 \frac{2\mathrm{d}\,t}{t^2-1}$.
- ☐ $\displaystyle\int_3^8 \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x+1}} = \ln\frac{3}{2}$.
- ☐ Le changement de variable $t = \sqrt{x+1}$ donne $\displaystyle\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$.
- ☐ $\displaystyle\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

Question 258
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $t=\sqrt{x}$ donne $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+1)\sqrt{x}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2\mathrm{d}\,t}{t^2+1}$.
- ☐ $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+1)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{6}$.
- ☐ Le changement de variable $t=\sqrt{x}$ donne $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$.
- ☐ $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x = \sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$.

Question 259
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\displaystyle\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ \frac{2t}{t^2+2t+1} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}$.
- ☐ $\displaystyle\ln(t+1)+\frac{1}{t+1}$ est une primitive de $\displaystyle\frac{2t}{t^2+2t+1}$ sur $]-1,+\infty[$.
- ☐ Le changement de variable $t=\sqrt{x}$ donne $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x+2\sqrt{x}+1} = \int_0^1 \frac{2t\mathrm{d}\,t}{t^2+2t+1}$.
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x+2\sqrt{x}+1} = 2\ln 2 - 1$.

Question 260
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\displaystyle\forall t\in\mathbb{R},\ \frac{2t}{t^2+t+1} = \frac{2t+1}{t^2+t+1} - \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$.
- ☐ $\displaystyle\ln(t^2+t+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$ est une primitive de $\displaystyle\frac{2t}{t^2+t+1}$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ Le changement de variable $t=\sqrt{x}$ donne $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}+1} = \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$.
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

7.4 Calculs d'intégrales | Niveau 4

Question 261

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos^2 x \mathrm{d}x$, $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin^2 x \mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(2x)\mathrm{d}x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ A l'aide de deux intégrations par parties successives, on obtient : $K = \mathrm{e}^{\pi} - 1 - 4K$ et donc $K = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi} - 1}{5}$.
- ☐ $I + J = \mathrm{e}^{\pi}$ et $I - J = K$.
- ☐ $I = \dfrac{6\mathrm{e}^{\pi} - 1}{10}$.
- ☐ $J = \dfrac{4\mathrm{e}^{\pi} + 1}{10}$.

Question 262

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\mathrm{d}x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Le changement de variable $t = \cos x$ donne $J = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2}$.
- ☐ Le changement de variable $t = \pi - x$ donne $I = \pi J - I$.
- ☐ $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x \,\mathrm{d}x . \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2} J$.
- ☐ $I = \dfrac{\pi^3}{4}$.

Question 263

Soit $f(x) = \dfrac{6x + 8}{(x + 3)(x^2 - 4)}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La décomposition en éléments simples de f a la forme : $f(x) = \dfrac{a}{x + 3} + \dfrac{b}{x^2 - 4}$.
- ☐ Une primitive de f sur $]-2, 2[$ est donnée par $F(x) = \ln \dfrac{(4 - x^2)}{(x + 3)^2}$.
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 \ln \frac{3}{4}$.
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{(8 + 6\cos t)\sin t}{(3 + \cos t)(\cos^2 t - 4)}\,\mathrm{d}t = 3 \ln \frac{3}{4}$.

Question 264

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ Le changement de variable $t = \cos x$ donne

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos^2 x)} = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)(1+t^2)}.$$

☐ $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\dfrac{4}{(1-t^2)(1+t^2)} = \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{2}{1+t^2}$.

☐ Une primitive de $\dfrac{1}{(1-t^2)(1+t^2)}$ sur $]-1,1[$ est $\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right) + 2\arctan t$.

☐ $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos^2 x)} = \ln 3 + 2\arctan\frac{1}{2}$.

Question 265

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{(4+x^2)^2}$. On pose $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ On a : $\dfrac{2}{8^2} \leqslant I$ et $I > \dfrac{2}{4^2}$.

☐ Le changement de variable $x = 2t$ donne $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.

☐ $I = \dfrac{1}{16}\left(\left[\dfrac{t}{1+t^2}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)$.

☐ $I = \dfrac{2+\pi}{64}$.

Question 266

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ Le changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ donne :

$$\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}.$$

☐ $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\pi}{6}$.

☐ $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t^2\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$.

☐ $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$.

Question 267

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$ et $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\left(\ln^2 x + 1\right)^n}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $F_n(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \displaystyle\int_0^x \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{n+1}}$.
- ☐ $F_1(x) = \arctan x$ et $F_2(x) = (\arctan x)^2$.
- ☐ Le changement de variable $t = \ln x$ donne $I_n = F_n(1)$.
- ☐ $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$ et $I_2 = \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2$.

Développements limités

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

8 Développements limités

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction. On dit que $f(x)$ est un $o\left((x-a)^n\right)$ au voisinage de a et on écrit $f(x) = o((x-a)^n)$ si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$. On note par $DL_n(a)f(x)$ le développement limité de f à l'ordre n en a. On note aussi $DL_n(a^+)f(x)$ (resp. $DL_n(a^-)f(x)$) le développement limité de f à l'ordre n à droite en a (resp. à gauche en a).

8.1 Opérations sur les DL | Niveau 1

Question 268

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0 telle que $f(0) = 0$ et $DL_4(0)f(x) = x + x^2 + o(x^4)$. On peut en déduire que :

- ☐ f est continue en 0, dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
- ☐ Si f est 2 fois dérivable en 0 alors $f^{(2)}(0) = 1$.
- ☐ $DL_4(0)f(2x) = 2x + 2x^2 + o(x^4)$.
- ☐ $DL_4(0)f(x^2) = x^2 + x^4 + o(x^4)$.

Question 269

Soient f et g deux fonctions telles que :

$$DL_3(0)f(x) = x + x^3 + o(x^3) \text{ et } DL_3(0)g(x) = -x + x^3 + o(x^3).$$

On peut en déduire que :

- ☐ $DL_2(0)\,[f(x) + g(x)] = o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0)\,[f(x) - g(x)] = o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0)\,[2f(x) + g(x)] = x + o(x^2)$.
- ☐ $DL_6(0)f(x) \times g(x) = -x^2 + x^6 + o(x^6)$.

Question 270

Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_3(0)\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$.
- ☐ $DL_3(0)\dfrac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$.
- ☐ $DL_3(0)\dfrac{x}{1-x} = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$.
- ☐ $DL_3(0)\dfrac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)$.

Question 271

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_3(0)\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.
- ☐ $DL_3(0)\mathrm{e}^x = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.
- ☐ $DL_3(0)\,(\sin x + \mathrm{e}^x) = 2x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.
- ☐ $DL_3(0)\,(\sin x\,\mathrm{e}^x) = x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Question 272

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_3(0)\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.
- ☐ $DL_3(0)\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
- ☐ $DL_3(0)\,(\cos x + \mathrm{e}^x) = 2 + x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
- ☐ $DL_3(0)\,(\cos x\,\mathrm{e}^x) = 1 + x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

8.2 Opérations sur les DL | Niveau 2

Question 273
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_3(0)\sin(2x) = 2x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
- ☐ $DL_2(0)\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0)\cos(\sin x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ $DL_3(0)\cos(x - x^2) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.

Question 274
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_1(0)\sqrt{2+x} = 1 + \dfrac{1+x}{2} + o(1+x)$.
- ☐ $DL_1(0)\sqrt{4+x} = 2 + \dfrac{x}{2} + o(x)$.
- ☐ $DL_1(0)\sqrt{1+2x} = 1 + x + o(x)$.
- ☐ $DL_2(0)\sqrt[3]{1-3x} = 1 - x - x^2 + o(x^2)$.

Question 275
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_1(0)(8+3x)^{2/3} = 4 + 2x + o(x)$.
- ☐ $DL_1(0)1/\sqrt{1-2x} = 1 + x + o(x)$.
- ☐ $DL_3(0)\sqrt[3]{1+3x^3} = 1 + x^3 + o(x^3)$.
- ☐ $DL_1(0)\sqrt[3]{3+x} = 1 + \dfrac{x}{3} + o(x)$.

Question 276
Les égalités suivantes portent sur des développements limités en 0. Cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\ln(1+2x) = 2\left(x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$.
- ☐ $\ln(1-2x) = -2x - 2x^2 + o(x^2)$.
- ☐ $\ln(1+x^2) = x^2 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$.
- ☐ $\ln(1-x^2) = -\left[x^2 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)\right]$.

Question 277
Les égalités suivantes portent sur des développements limités en 0. Cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\ln(1+e^x) = 1 + x + o(x)$.
- ☐ $\ln(\cos x) = -x^2/2 + o(x^2)$.
- ☐ $\ln(1+\sin x) = x + o(x^2)$.
- ☐ $\ln(1-x^2) - \ln\big((1+x)^2\big) = o(x)$.

Question 278
On rappelle que $\tan x = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_3(0)\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.
- ☐ $DL_3(0)\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.
- ☐ $DL_3(0)\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
- ☐ $DL_3(0)\tan(x) = x - \dfrac{2x^3}{3} + o(x^3)$.

Question 279
Soit $f(x) = \arcsin(x)$ et $g(x) = \arctan(x)$. Alors

- ☐ $DL_2(0)f'(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0)g'(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$.
- ☐ $DL_3(0)f(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.
- ☐ $DL_3(0)g(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

8.3 Opérations sur les DL | Niveau 3

Question 280
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Pour obtenir le $DL_2(0)\sqrt{2+t}$, on écrit :
$$\sqrt{2+t} = \sqrt{1+(1+t)} = 1 + \frac{(1+t)}{2} - \frac{(1+t)^2}{8} + o((1+t)^2).$$
- ☐ Pour obtenir le $DL_2(2)\sqrt{x}$, on écrit :
$$\sqrt{x} = \sqrt{1+(x-1)} = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + o((x-1)^2).$$

☐ $DL_2(0)\dfrac{\ln(1+t)}{1+t} = t - \dfrac{3t^2}{2} + o(t^2)$.

☐ $DL_2(1)\dfrac{\ln x}{x} = (x-1) - \dfrac{3(x-1)^2}{2} + o((x-2)^2)$.

Question 281

Les égalités suivantes portent sur des développements limités au voisinage de $+\infty$. Cocher celles qui sont vraies :

☐ $DL_3(+\infty)\sin\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{6x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

☐ $DL_2(+\infty)\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

☐ $DL_2(+\infty)\ln\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

☐ $DL_2(+\infty)\dfrac{1}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Question 282

Les égalités suivantes portent sur des développements limités au voisinage de $+\infty$. Cocher celles qui sont vraies :

☐ $\sin\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

☐ $\cos\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = 1 - \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

☐ $\dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

☐ $\ln\left(1 + \dfrac{x}{x^2-1}\right) = \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Question 283

Soit $f(x) = \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{\sqrt{1+2x}-1}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $DL_2(0)\ln(1+x+x^2) = x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

☐ $DL_2(0)\left(\sqrt{1+2x}-1\right) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

☐ $DL_2(0)f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

☐ $DL_3(0)[xf(x)] = x + x^2 + \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$.

Question 284

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_2(0) f(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0) g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0) [f(x) + g(x)] = 2 - x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0) \dfrac{f(x)}{g(x)} = 2 - 2x + \dfrac{3x^2}{2} + o(x^2)$.

Question 285

Soit $f(x) = \ln[1+\sin x]$ et $g(x) = \ln[1+\cos x]$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_2(0) f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0) g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0) [f(x) + g(x)] = 1 + x - x^2 + o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0) f(x)g(x) = \ln(2)x - \dfrac{\ln(2)}{2} x^2 + o(x^2)$.

Question 286

Soit $f(x) = \arctan x$. Pour $t \neq 0$, on pose $g(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Pour $t > 0$, on a : $g(t) = \dfrac{\pi}{2} + \arctan(t)$.
- ☐ Pour tout $x > 0$, $g'(t) = \dfrac{-1}{1+t^2}$.
- ☐ $DL_3(0^+) g(t) = -t + \dfrac{t^3}{3} + o(t^3)$.
- ☐ $DL_3(+\infty) f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

Question 287

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_3(0) f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.
- ☐ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.

- ☐ $DL_2(0)g(x) = \left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)' = 1+x+o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0)g(x) = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}x^2}{2} + o(x^2)$.

Question 288
Soit $f(x) = \ln\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_2(0)(\mathrm{e}^x-1) = x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ et $DL_2(0)\frac{x}{\mathrm{e}^x-1} = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0)\ln(1+u) = u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$.
- ☐ $DL_2(0)f(x) = -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)$.
- ☐ $DL_1(0)f(x) = -\frac{x}{2}+o(x)$.

Question 289
Soit $f(x) = (1+x)^{1/x}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_2(0)\frac{\ln(1+x)}{x} = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0)\mathrm{e}^{1+u} = 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)$.
- ☐ $DL_2(0)f(x) = \frac{5}{2}-2x+\frac{3x^2}{2}+o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0)f(x) = \mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}x+\frac{11\mathrm{e}}{24}x^2+o(x^2)$.

Question 290
Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_2(0)\frac{\ln(1+x)}{x-x^2} = 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.
- ☐ $DL_2(0)\frac{\mathrm{e}^x-1}{\ln(1+x)} = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.
- ☐ $DL_4(0)\ln(1+x\sin x) = x^2-\frac{2x^4}{3}+o(x^4)$.
- ☐ $DL_4(0)\arcsin\left(\ln(1+x^2)\right) = x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$.

Question 291
Soit $f(x) = \arctan(1+x)$ et $g(x) = \arctan(\cos x)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $DL_2(0) f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$.

☐ $DL_3(0) f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$.

☐ $DL_3(0) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ et $DL_3(0) \arctan u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$.

☐ $DL_3(0) g(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)$.

8.4 Opérations sur les DL | Niveau 4

Question 292

Soit $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1+t}} \mathrm{d}t$ et $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$. Alors

☐ $DL_2(0) g(x) = x - x^2 + o(x^2)$.

☐ $f'(x)$ ne possède pas de $DL(0)$.

☐ $f(x)$ ne possède pas de $DL(0)$.

☐ $DL_3(0) f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Question 293

Soit $f(x) = (1+x)^{1/(\mathrm{e}^x - 1)}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $DL_2(0) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $DL_2(0)(\mathrm{e}^x - 1) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

☐ $DL_2(0) \frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

☐ $DL_2(0) f(x) = \mathrm{e}.\mathrm{e}^{-x+x^2/2+o(x^2)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}.x + \mathrm{e}.x^2 + o(x^2)$.

☐ $DL_2(0) f(x) = \mathrm{e} - \mathrm{e}.x + \frac{7\mathrm{e}}{6} x^2 + o(x^2)$.

Question 294

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}$. On considère la fonction g définie par $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ Pour $0 < t < 1$, $g(t) = \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t^2}}{t}$ et $DL_2(0^+) g(t) = \frac{1}{2} + \frac{3t}{8} + o(t^2)$.

☐ $DL_2(+\infty) f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

☐ $DL_2(+\infty) f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{1}{16x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

- ☐ $DL_2(-\infty)f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + \frac{1}{16x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Question 295

Soit $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$. On considère la fonction g définie par $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Pour $0 < t$, $g(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1+t)$ et $DL_1(0)g'(t) = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2} + o(t)$.
- ☐ $DL_2(0^+)g(t) = -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + o(t^2)$.
- ☐ $DL_2(+\infty)f(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
- ☐ $DL_2(+\infty)f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Question 296

Soient f et g telles que $f(x) = \frac{x^2}{x-1}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ et $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $g(t) = \frac{\ln(1+t)}{t-t^2}$.
- ☐ $DL_2(0)g(t) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$.
- ☐ $DL_2(0)(+\infty)f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
- ☐ $DL_2(0)(+\infty)f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

8.5 Applications des DL | Niveau 1

Question 297

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{1+x}-1} = 2$.
- ☐ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)} = 1$.
- ☐ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}$.
- ☐ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} = 2$.

Question 298

Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ et $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{2x+x^2}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_1(0)g(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + o(x)$.
- ☐ $f(1+x) = g(x)$ et $DL_1(1)f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + o(x)$.
- ☐ $\lim_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.
- ☐ $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

8.6 Applications des DL | Niveau 2

Question 299

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = 1$.
- ☐ $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.
- ☐ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}$.
- ☐ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sin^2 x}$ n'existe pas.

Question 300

Soit f telle que $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x + x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. On note T_0 la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 lorsqu'elle existe. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_2(0)f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et f est continue en 0.
- ☐ f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
- ☐ T_0 est la droite d'équation $y = 1 - \frac{x}{2}$ et le graphe de f est en dessous de T_0 au voisinage de 0.

Question 301

Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+2x+2}$ et $g(x) = f(x-1)$. On note T la tangente au graphe de f au point d'abscisse -1. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $DL_3(0)g(x) = 1 - 2x + 2x^3 + o(x^3)$.

☐ T est la droite d'équation $y = 1-2x$ et le graphe de f est au dessus de T au voisinage de -1.

☐ T est la droite d'équation $y = 1-2x$ et le graphe de f est en dessous de T au voisinage de -1.

☐ T est la droite d'équation $y = 1-2x$ et le point d'abscisse -1 est un point d'inflexion.

Question 302

Soit $f(x) = x - \sin x$. On note T_0 la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $DL_3(0)f(x) = \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

☐ T_0 est la droite d'équation $y = 0$ et f admet un extrémum en 0.

☐ Le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion.

☐ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$ n'existe pas.

Question 303

Soit $f(x) = x \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$. On note Γ le graphe de f et on pose $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $DL_1(0)g(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$.

☐ Au voisinage de $+\infty$, on a : $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

☐ Γ admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

☐ Γ admet la droite d'équation $y = -1$ comme asymptote au voisinage de $-\infty$.

Question 304

Soit $f(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$. On note Γ le graphe de f et on pose $g(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ $DL_2(0)g(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x^2)$.

☐ Au voisinage de $+\infty$, on a : $f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

☐ Γ admet la droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

☐ Γ est au dessus de la droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ au voisinage de $-\infty$.

8.7 Applications des DL | Niveau 3

Question 305

Soit $f(x) = \sqrt{2+x^2}$. On note Γ le graphe de f et on pose $g(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_2(0)g(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$.
- ☐ Au voisinage de $+\infty$, on a : $f(x) = x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
- ☐ Γ admet la droite d'équation $y = x$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.
- ☐ Γ est en dessous de la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

Question 306

Soit $f(x) = \sqrt{1+2x} - 1$ et $g(x) = \ln(1+x)$. On note T_0 la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_2(0)f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $DL_2(0)g(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ T_0 est la droite d'équation $y = x$ et le graphe de f est au-dessus de T_0 au voisinage de 0.
- ☐ $DL_1(0)\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + o(x)$.
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{\ln(1+x)} = 0$.

Question 307

Soit f telle que $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x^2+2\sin x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. On note T_0 la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 lorsqu'elle existe. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_2(0)f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et f est continue en 0.
- ☐ f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.
- ☐ T_0 est la droite d'équation $y = 1 + \frac{x}{2}$ et le graphe de f est en dessous de T_0 au voisinage de 0.

Question 308

Soit $f(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$ et $g(x) = 1 - \cos x$. On note T_0 la tangente au graphe de f au point 0. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ T_0 est horizontale et le graphe de f est en dessous de T_0 au voisinage de 0.
- ☐ $DL_2(0)g(x) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ $DL_0(0)\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 + o(1)$.
- ☐ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{1-\cos x} = 1$.

Question 309

On considère les fonctions f et g telles que $f(x) = (1+x)e^{1/(x+1)}$ et $g(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On note Γ le graphe de f et Δ la droite d'équation $y = x+2$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_2(0^+)g(x) = 1 + 2x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} g(x) = -1$.
- ☐ Au voisinage de $+\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ.
- ☐ Au voisinage de $-\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ.

Question 310

Soit f telle que $f(x) = \dfrac{2}{\sin(x^2)} + \dfrac{2}{\ln(1-x^2)}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. La tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 lorsqu'elle existe est notée T_0. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ f n'est pas dérivable en 0.
- ☐ f n'admet pas de développement limité d'ordre 2 en 0.
- ☐ $DL_2(0)f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ T_0 est la droite d'équation $y = 1$ et le graphe de f est au dessus de T_0 au voisinage de 0.

8.8 Applications des DL | Niveau 4

Question 311

On considère les fonctions f et g telles que $f(x) = x\arctan x$ et $g(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On note Γ le graphe de f et Δ la droite d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_3(0^+)g(x) = \dfrac{\pi}{2} - x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et g se prolonge par continuité en 0.
- ☐ Au voisinage de $+\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ.
- ☐ Au voisinage de $-\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ.

Question 312

On considère les fonctions f et g telles que $f(x) = x^2 \arctan \dfrac{1}{1+x^2}$ et $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On note Γ le graphe de f et Δ la droite d'équation $y = 1$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_2(0^+)g(x) = 1 + 2x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -1$.
- ☐ Au voisinage de $+\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ.
- ☐ Au voisinage de $-\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé en dessous de Δ.

Question 313

Soit $f(x) = x \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. On considère la fonction g telle que $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et on note Γ le graphe de f. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_2(0^+)g(x) = 1 - \dfrac{5x^2}{6} + o(x^2)$.
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ et g se prolonge par continuité en 0.
- ☐ Γ admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.
- ☐ Γ admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote au voisinage de $-\infty$.

Question 314

On considère les fonctions f et g telles que $f(x) = \sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{1/(x+1)}$ et $g(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On note Γ le graphe de f et Δ la droite d'équation $y = x + 1$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $DL_3(0^+)g(x) = 1 + x + \dfrac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ et g se prolonge par continuité en 0.

- ☐ Au voisinage de $+\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ.
- ☐ Au voisinage de $-\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ.

Equations différentielles

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

9 Equations différentielles

9.1 Equations du premier ordre | Niveau 1

Question 315
On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\ :\ y' - 2y = 0 \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y' + 2xy = 0.$$

Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{2x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{-x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.

Question 316
On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\ :\ (1+x^2)y' - y = 0 \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y' - \frac{y}{1+x^2} = 0.$$

Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Si y est une solution de (E_1), alors $z = \dfrac{y}{1+x^2}$ est une solution de (E_2).
- ☐ (E_1) est (E_2) ont les mêmes solutions.
- ☐ La solution générale de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{arctan(x)}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\arctan(x)$, $k \in \mathbb{R}$.

Question 317
On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = \mathrm{e}^t$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La fonction $y_0 = t\mathrm{e}^t$ est une solution de (E).
- ☐ La fonction $y_1 = \mathrm{e}^{-t}$ est une solution de (E).
- ☐ La fonction $y = (1-t)\mathrm{e}^t$ est l'unique solution de (E) telle que $y(1) = 0$.
- ☐ La fonction $y = (1+t)\mathrm{e}^t$ est l'unique solution de (E) telle que $y(0) = 1$.

9.2 Equations du premier ordre | Niveau 2

Question 318
On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2xy = 4x$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{-x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La fonction $y = -2$ est une solution particulière de (E).
- ☐ La solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{x^2} - 2$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ E admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y'(0) = 0$.

Question 319
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \mathrm{e}^x$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de l'équation homogène est $y = k\mathrm{e}^x$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La fonction $y_0 = \mathrm{e}^x$ est une solution particulière de (E).
- ☐ La solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est $y = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.
- ☐ La solution de (E) vérifiant $y'(0) = 0$ est $y = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Question 320
On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y' - (2x-1)y = x^2$ sur $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La fonction $y = x^2$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
- ☐ La fonction $y = x^2\left(1 - \mathrm{e}^{1/x}\right)$ est une solution de l'équation homogène.
- ☐ La fonction $y = 2x^2\mathrm{e}^{1/x}$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
- ☐ La fonction $y = x^2\left(1 - \mathrm{e}^{1/x}\right)$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

9.3 Equations du premier ordre | Niveau 3

Question 321
On considère l'équation différentielle (E) : $\left(1+\cos^2 x\right)y' + y\sin(2x) = 0$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ $A(x) = \ln(1+\cos^2 x)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $a(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}$.
- ☐ Toute solution de (E) vérifie $y'(0) = 0$.
- ☐ (E) n'admet pas de solution vérifiant $y(0) = 0$.
- ☐ La solution générale de (E) est : $y = k + k\cos^2 x$, $k \in \mathbb{R}$.

Question 322
On considère l'équation différentielle (E) : $(1+x^2)y' - y = 1$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de l'équation homogène est : $y = k\mathrm{e}^{-\arctan x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E) est : $y = -1 + k\mathrm{e}^{\arctan x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ L'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ et $y = -1 + \mathrm{e}^{\arctan x}$.
- ☐ (E) n'admet pas de solution vérifiant $y'(0) = 0$.

Question 323
On considère l'équation différentielle (E) : $\sqrt{1-x^2}\,y' - y = 1$ sur $]-1,1[$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de l'équation homogène est : $y = k\mathrm{e}^{\arcsin x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E) est : $y = 1 + k\mathrm{e}^{\arcsin x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est $y = 1 - \mathrm{e}^{\arcsin x}$.
- ☐ (E) admet une unique solution vérifiant $y'(0) = 0$ et c'est $y = -1$.

Question 324
On considère l'équation différentielle (E) : $\sqrt{1+x^2}\,y' - xy = x$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de l'équation homogène est : $y = k\mathrm{e}^{1+x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E) est : $y = -1 + k\mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Toute solution y de (E) vérifie $y'(0) = 0$.
- ☐ (E) admet une unique solution vérifiant $y'(0) = 0$.

Question 325
On considère l'équation différentielle (E) : $(1+x^2)y' + 2xy = 2x$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de l'équation homogène est : $y = \dfrac{k}{1+x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.
- ☐ (E) n'admet pas de solution vérifiant $y'(0) = 0$.
- ☐ (E) admet une unique solution vérifiant $y'(0) = 0$.

Question 326

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - \dfrac{xy}{1+x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de l'équation homogène est : $y = k\sqrt{1+x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La fonction $y = \arctan x.\sqrt{1+x^2}$ est une solution de E.
- ☐ (E) possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.
- ☐ La solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est $y = x\sqrt{1+x^2}$.

Question 327

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y' - y = 1$ sur $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La fonction $y = -1 + \mathrm{e}^{-1/x}$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
- ☐ La fonction $y = 1 - \mathrm{e}^{-1/x}$ est une solution de (E) sur $]-\infty, 0[$.
- ☐ La fonction $y = 2\mathrm{e}^{-1/x}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
- ☐ La solution de (E) sur $]0, +\infty[$ vérifiant $y(1) = -1$ est constante.

Question 328

On considère l'équation différentielle (E) : $t^2y' = y$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ (E) est une équation linéaire homogène du premier ordre.
- ☐ La fonction $y = \mathrm{e}^{1/t}$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
- ☐ La solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$ est $y = k\mathrm{e}^{-1/t}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La fonction nulle est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

9.4 Equations du premier ordre | Niveau 4

Question 329

On considère l'équation différentielle (E) : $y' \ln x + \dfrac{y}{x} = 2x$ sur $]1, +\infty[$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de l'équation homogène est : $y(x) = k \ln x$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Si $y(x) = \dfrac{k(x)}{\ln x}$ est une solution de (E) sur $]1, +\infty[$, alors $k'(x) = 2x$.
- ☐ La solution générale de (E) sur $]1, +\infty[$ est $y(x) = \dfrac{k + x^2}{\ln x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ (E) possède une infinité de solutions sur $[1, +\infty[$.

Question 330
On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y \tan x = 1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de l'équation homogène est $y = \dfrac{k}{\cos(x)}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Si $y = \dfrac{k(x)}{\cos(x)}$ est une solution de (E), alors $k'(x) = \cos(x)$.
- ☐ La solution générale de (E) est $y = \dfrac{k}{\cos(x)} + \sin x$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ (E) possède une solution qui se prolonge par continuité en $-\pi/2$ et en $\pi/2$.

Question 331
On considère l'équation différentielle (E) : $xy' - 2y = x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$ est : $y = kx^2 - x$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E) sur $]-\infty, 0[$ est : $y = kx^2 - x$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y(x) = kx^2 - x$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ (E) possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.

Question 332
On considère l'équation différentielle (E) : $(x + 1)y' + y = 2x + 1$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de (E) sur $]-1, +\infty[$ est : $y = x + \dfrac{k}{x+1}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E) sur $]-\infty, -1[$ est :$y = x + \dfrac{k}{x+1}$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y = x + \dfrac{k}{x+1}$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ (E) possède une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$.

Question 333
On considère l'équation différentielle (E) : $(1-x^2)y'-(1+x)y=1$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de (E) sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$ est :
$$y=\frac{k+\ln|1+x|}{1-x},\ k\in\mathbb{R}.$$
- ☐ L'équation (E) admet une solution sur $\mathbb{R}$.
- ☐ L'équation (E) admet une solution sur $]-\infty,1[$.
- ☐ L'équation (E) admet une unique solution sur $]-1,+\infty[$.

Question 334
On considère l'équation différentielle (E) : $x(1-x)y'+y=x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de l'équation homogène sur $]1,+\infty[$ est $y=\dfrac{k(x-1)}{x}$, $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ La fonction $y=\dfrac{1-x}{x}\ln|1-x|+\dfrac{1}{x}$ est une solution de (E) sur $]1,+\infty[$.
- ☐ L'équation (E) admet une infinité de solutions sur $]-\infty,1[$.
- ☐ L'équation (E) admet une solution sur $]0,+\infty[$.

9.5 Equations du second ordre | Niveau 1

Question 335
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de l'équation différentielle $y''-y=0$ sur $\mathbb{R}$ est
$$y=(k_1x+k_2)\mathrm{e}^x,\quad k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$
- ☐ La solution générale de l'équation différentielle $y''-y=0$ sur $\mathbb{R}$ est
$$y=k_1\mathrm{e}^x+k_2\mathrm{e}^{-x},\quad k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$
- ☐ La solution générale de l'équation différentielle $y''-3y'+2y=0$ sur $\mathbb{R}$ est
$$y=k_1\mathrm{e}^x+k_2\mathrm{e}^{2x},\quad k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$
- ☐ La solution générale de l'équation différentielle $y''-3y'+2y=0$ sur $\mathbb{R}$ est
$$y_1=k_1\mathrm{e}^x\quad\text{ou}\quad y_2=k_2\mathrm{e}^{2x},\quad k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

Question 336
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ sont les fonctions $y = (k_1 + k_2 x)e^x$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
- ☐ Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ sont les fonctions $y_1 = e^x$ et $y_2 = xe^x$.
- ☐ Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$ sont les fonctions $y_1 = e^{2x}$ et $y_2 = 2e^{2x}$.
- ☐ Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$ sont les fonctions $y = (k_1 + k_2 x)e^{-2x}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Question 337
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+y = 0$ sont les fonctions $y_1 = \sin(x)$ et $y_2 = \cos(x)$.
- ☐ Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ sont les fonctions $y = k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
- ☐ Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ sont les fonctions $y_1 = \sin(2x)$ et $y_2 = \cos(2x)$.
- ☐ Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ sont les fonctions $y = k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Question 338
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ sont les fonctions $y = k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
- ☐ Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ sont les fonctions $y = e^x[k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x)]$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
- ☐ Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = 0$ sont les fonctions $y = e^{-x}[k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x)]$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
- ☐ Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = 0$ sont les fonctions $y_1 = e^{-x} \cos(2x)$ et $y_2 = e^{-x} \sin(2x)$.

9.6 Equations du second ordre | Niveau 2

Question 339
On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\ :\ y'' - 4y = 4x \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y'' + 2y' + y = x + 2.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ La solution générale de (E_1) est : $y=-x+k_1\mathrm{e}^{2x}+k_2\mathrm{e}^{-2x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.
- ☐ Les solutions de (E_1) sont les fonctions $y=-x+\mathrm{e}^{2x}$ et $y_2=-x+\mathrm{e}^{-2x}$.
- ☐ La solution générale de (E_2) est : $y=x+k\mathrm{e}^{-x}$, $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_2) est $y=x+(k_1x+k_2)\mathrm{e}^{-x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

Question 340
Sur $\mathbb{R}$, on considère les équations différentielles :

$$(E_1)\ :\ y''-y'-2y=2 \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y''+y=x.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Les solutions de (E_1) sont les fonctions $y=-1+k_1\mathrm{e}^{2x}+k_2\mathrm{e}^{-x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.
- ☐ Les solutions de (E_1) sont les fonctions $y_1=-1+\mathrm{e}^{2x}$ et $y_2=-1+\mathrm{e}^{-x}$.
- ☐ Les solutions de (E_2) sont les fonctions $y=x+k_1\cos(x)+k_2\sin(x)$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.
- ☐ Les solutions de (E_2) sont les fonctions $y=x+\cos(x)$ et $y_2=x+\sin(x)$.

9.7 Equations du second ordre | Niveau 3

Question 341
On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\ :\ y''-y=3+\mathrm{e}^{2x} \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y''-y=2+\mathrm{e}^{x}.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ (E_1) admet une solution particulière sous la forme $y_0=a+b\mathrm{e}^{2x}$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.
- ☐ (E_2) admet une solution particulière sous la forme $y_0=a+b\mathrm{e}^{x}$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_1) est : $y=-3+\mathrm{e}^{2x}+k_1\mathrm{e}^{x}+k_2\mathrm{e}^{-x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_2) est : $y=-2+\left(k_1+\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{x}+k_2\mathrm{e}^{-x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

Question 342
On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\ :\ y''-4y'+4y=4+2\mathrm{e}^{2x} \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y''-4y'+4y=8+\mathrm{e}^{x}.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ (E_1) admet une solution particulière sous la forme $y_0=a+b\mathrm{e}^{2x}$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.
- ☐ (E_2) admet une solution particulière sous la forme $y_0=a+b\mathrm{e}^{x}$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_1) est $y=1+\left(k_1+k_2x+x^2\right)\mathrm{e}^{2x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_2) est $y=1+\mathrm{e}^{x}+(k_1+k_2x)\,\mathrm{e}^{2x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

Question 343
On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\ :\ y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{2x} \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^{x}.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ (E_1) admet une solution sous la forme $y_0=a\mathrm{e}^{2x}$ où $a\in\mathbb{R}$.
- ☐ (E_2) admet une solution sous la forme $y_0=(ax+b)\mathrm{e}^{x}$ où $a,b\in\mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_1) est $y=a\mathrm{e}^{x}+(b+x)\mathrm{e}^{2x}$, $a,b\in\mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_2) est $y=\left(a-2x-x^2\right)\mathrm{e}^{x}+b\mathrm{e}^{2x}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Question 344
On considère l'équation différentielle (E) : $y''+y=2\cos x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Toute solution de (E) est combinaison linéaire de $\sin x$ et $\cos x$.
- ☐ Toute solution de (E) est combinaison linéaire de $\sin x$, $\cos x$, $x\sin x$ et $x\cos x$.
- ☐ (E) admet une solution sous la forme $y=x(a\sin x+b\cos x)$, où $a,b,\in\mathbb{R}$.
- ☐ La solution de (E) telle que $y(0)=0$ et $y'(0)=0$ est $y=x\cos x$.

Question 345
On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\ :\ y''-4y'+5y=\mathrm{e}^{2x} \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y''-4y'+5y=8\sin x.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ (E_1) admet une solution sous la forme $y_0=ax\mathrm{e}^{2x}$ avec $a\in\mathbb{R}$.
- ☐ (E_2) admet une solution sous la forme $y_0=a\sin x$ avec $a\in\mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_1) est $y=\mathrm{e}^{2x}\left[1+a\cos x+b\sin x\right]$, $a,b\in\mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_2) est $y=\left(1+a\mathrm{e}^{2x}\right)\cos x+\left(1+b\mathrm{e}^{2x}\right)\sin x$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Question 346
On considère l'équation différentielle (E) : $y''-2y'+2y=2\mathrm{e}^{x}\cos x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Les solutions de l'équation caractéristique sont $1\pm\mathrm{i}$.
- ☐ (E) admet une solution sous la forme $y_0=a\mathrm{e}^{x}\cos x$ avec $a\in\mathbb{R}$.
- ☐ La fonction $y_0=x\mathrm{e}^{x}\sin x$ est une solution de (E).
- ☐ La solution générale de (E) est : $y=\mathrm{e}^{x}\left(a\cos x+b\sin x\right)+2\mathrm{e}^{x}\cos x$, $a,b\in\mathbb{R}$.

9.8 Equations du second ordre | Niveau 4

Question 347
On considère les équations différentielles

$$(E_1)\ :\ xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 2\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y'' + 2y' + y = 2\mathrm{e}^{-x}.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Si y est une solution de (E_1), alors $z = xy$ est une solution de (E_2).
- ☐ (E_2) admet une solution particulière sous la forme $y_0 = a\mathrm{e}^{-x}$, $a \in \mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_1) sur $]0,+\infty[$ est $y = \left(x + a + \frac{b}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- ☐ Toute solution de (E_1) sur $]0,+\infty[$ se prolonge par continuité en 0.

Question 348
On considère les équations différentielles

$$(E_1)\ :\ xy'' + 2y' - xy = 2\mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ z'' - z = 2\mathrm{e}^{x}.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ Si y est une solution de (E_1), alors $z = xy$ est une solution de (E_2).
- ☐ (E_1) admet une solution particulière sous la forme $y_0 = a\mathrm{e}^{x}$, $a \in \mathbb{R}$.
- ☐ La solution générale de (E_1) sur $]0,+\infty[$ est $y = \left(\frac{a}{x} + 1\right)\mathrm{e}^{x} + \frac{b}{x}\mathrm{e}^{-x}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- ☐ (E_1) n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Courbes paramétrées

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

---

10 Courbes paramétrées

10.1 Courbes paramétrées | Niveau 1

Question 349
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = t - 1 \quad \text{et} \quad y = t + 1.$$

- ☐ Γ est la droite d'équation $y = 2 + x$.

- ☐ La tangente à Γ au point $(x(0), y(0))$ est la droite d'équation $y = x$.
- ☐ La tangente à Γ au point $(x(1), y(1))$ est la droite d'équation $y = 2 + x$.
- ☐ Γ possède un point double.

Question 350
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = 1 + \cos(2t) \quad \text{et} \quad y = 1 + \sin(2t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

- ☐ Γ est le cercle de centre $(1, 1)$ et de rayon 2.
- ☐ Γ possède un point double.
- ☐ La tangente à Γ au point $(x(0), y(0))$ est la droite d'équation $x = 2$.
- ☐ La tangente à Γ au point $(x(\pi), y(\pi))$ est la droite d'équation $y = x$.

10.2 Courbes paramétrées | Niveau 2

Question 351
Un avion en papier a effectué un vol suivant la trajectoire Γ donnée par

$$x = t - 2\sin t \quad \text{et} \quad y = 4 - 3\cos t.$$

- ☐ A l'instant $t = \pi$, l'avion volait en position verticale.
- ☐ A l'instant $t = \pi$, l'avion volait en position horizontale.
- ☐ A l'instant $t = \pi/2$, l'avion volait suivant la droite d'équation $y = 3x + 10$.
- ☐ A l'instant $t = \pi/3$, l'avion volait en position verticale.

Question 352
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = t^2 + t^3 \quad \text{et} \quad y = 2t^2 - t^3.$$

- ☐ Le point de paramètre 0 est un point de rebroussement de seconde espèce.
- ☐ La tangente à Γ au point $(x(0), y(0))$ est la droite d'équation $y = 2x$.
- ☐ La tangente à Γ au point $(x(1), y(1))$ est dirigée par le vecteur $(5, 1)$.
- ☐ La tangente à Γ au point $(x(1), y(1))$ est la droite d'équation $5x - y + 3 = 0$.

Question 353
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = 2t^2 - t^4 \quad \text{et} \quad y = t^2 + t^4.$$

- ☐ Le point de paramètre 0 est un point de rebroussement de seconde espèce.
- ☐ La tangente à Γ au point $(x(0), y(0))$ est la droite d'équation $y = 2x$.
- ☐ Γ admet la droite d'équation $y = -x$ comme asymptote quand t tend vers l'infini.
- ☐ Γ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = -x$.

10.3 Courbes paramétrées | Niveau 3

Question 354

La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = \frac{1}{2}(t^2 - 2t) \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2.$$

- ☐ Le point de paramètre 1 est un point de rebroussement de seconde espèce.
- ☐ La tangente à Γ au point $(x(1), y(1))$ est la droite d'équation $y = x$.
- ☐ Le point de paramètre 0 est un point stationnaire.
- ☐ Γ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y.

Question 355

La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = 2 + \cos t \quad \text{et} \quad y = \frac{t^2}{2} + \sin t.$$

- ☐ Γ n'admet pas de point stationnaire.
- ☐ Le point de paramètre $t = \pi/2$ est un point d'inflexion.
- ☐ La tangente à Γ au point de paramètre $t = \pi/2$ est verticale.
- ☐ Γ est symétrique par rapport à l'axe des x.

Question 356

La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = 1 + \cos t \quad \text{et} \quad y = t - \sin t.$$

- ☐ Γ est symétrique par rapport à l'axe des y.
- ☐ Γ admet un point double.
- ☐ Le point de paramètre $t = 0$ est un point de rebroussement de première espèce.
- ☐ La tangente à Γ au point de paramètre $t = 0$ est horizontale.

Question 357
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations
$$x(t) = \frac{1}{1-t^2} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{1}{1+t^4}.$$
- ☐ Γ est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- ☐ Γ admet la droite d'équation $y = 1/2$ comme asymptote quand t tend vers 1.
- ☐ Le point de paramètre $t = 0$ est un point de rebroussement de seconde espèce.
- ☐ La tangente à Γ au point de paramètre $t = 0$ est verticale.

Question 358
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations
$$x = \frac{t^2}{1-t^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{t^2}{1+t}.$$
- ☐ Le point de paramètre 0 est un point de rebroussement de seconde espèce.
- ☐ La tangente à Γ au point de paramètre 1 est la droite d'équation $y = x$.
- ☐ Γ admet la droite d'équation $y = 2$ comme asymptote quand t tend vers 1.
- ☐ Γ admet la droite d'équation $y = 2x - 1/2$ comme asymptote quand t tend vers -1.

10.4 Courbes paramétrées | Niveau 4

Question 359
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations
$$x = \frac{t}{4-t^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{t^2}{2-t}.$$
- ☐ Γ admet un seul point stationnaire.
- ☐ La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote quand t tend vers -2.
- ☐ La droite d'équation $y = 8x - 3$ est une asymptote quand t tend vers 2.
- ☐ Le point de coordonnées $(1/2, 2)$ est un point double.

Question 360
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations
$$x = \frac{t^2}{1-t} \quad \text{et} \quad y = \frac{3t-1}{1-t^2}.$$
- ☐ Γ admet un seul point stationnaire.
- ☐ La droite d'équation $y = 1/2$ est une asymptote quand t tend vers -1.
- ☐ La droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote quand t tend vers 1.
- ☐ Le point de paramètre 0 est un méplat.