Année 2020

QCM DE MATHÉMATIQUES - LILLE - PARTIE 2

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

Ces questions ont été écrites par Abdellah Hanani et Mohamed Mzari de l'université de Lille.

Ce travail a été effectué en 2019 dans le cadre d'un projet Liscinum porté par l'université de Lille et Unisciel.

Table des matières

Première partie

Algèbre

Systèmes d'équations linéaires

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

1 Systèmes d'équations linéaires

1.1 Systèmes d'équations linéaires | Niveau 1

Question 1

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 0 \\ x - y - z & = & 0 \\ 3x + 2y + z & = & 0. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] (S) $\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 0 \\ 5y - 2z & = & 0 \\ z & = & 0. \end{array} \right.$
- ☐ [Faux] (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ [Faux] (S) n'admet pas de solution.
- ☐ [Vrai] (S) admet une unique solution.

Explications: L'algorithme de Gauss donne :

$$(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 0 \\ 5y - 2z & = & 0 \\ z & = & 0. \end{array} \right.$$

Donc (S) admet une unique solution : $(0, 0, 0)$.

Question 2

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 0 \\ -x + z & = & 0 \\ x + y & = & 0. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] (S) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & x. \end{array}\right.$
- ☐ [Vrai] L'ensemble des solutions de (S) est une droite.
- ☐ [Faux] (S) n'admet pas de solution.
- ☐ [Faux] (S) admet une unique solution.

Explications:

$$(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & x. \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de (S) est la droite : $\{(x,-x,x)\,;\ x\in\mathbb{R}\}$.

Question 3

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S})\ \left\{\begin{array}{rcr} x-y+2z & = & 1 \\ -2x+2y-4z & = & -2 \\ 3x-3y+6z & = & 3. \end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] (S) $\Leftrightarrow x-y+2z=1$.
- ☐ [Vrai] L'ensemble des solutions de (S) est un plan.
- ☐ [Faux] (S) n'admet pas de solution.
- ☐ [Faux] (S) admet une unique solution.

Explications: (S) $\Leftrightarrow x-y+2z=0$. L'ensemble des solutions de (S) est un plan.

Question 4

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S})\ \left\{\begin{array}{rcr} x+y-z & = & 2 \\ -x+y+z & = & 0 \\ 2x+z & = & -1. \end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] (S) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x+y-z & = & 2 \\ y & = & 1 \\ z & = & -1. \end{array}\right.$
- ☐ [Faux] (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ [Faux] (S) n'admet pas de solution.
- ☐ [Vrai] (S) admet une unique solution.

Explications:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z & = & 2 \\ y & = & 1 \\ z & = & -1. \end{cases}$$

Donc (S) admet une unique solution : $(0,1,-1)$.

Question 5

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \begin{cases} x-y+z & = & 1 \\ 2x-3y+4z & = & 1 \\ y+z & = & 1. \end{cases}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z & = & 1 \\ y-2z & = & 1 \\ z & = & 0. \end{cases}$
- ☐ [Vrai] Les équations de (S) sont celles de trois plans.
- ☐ [Vrai] (S) admet une unique solution.
- ☐ [Faux] (S) n'admet pas de solution.

Explications:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z & = & 1 \\ y-2z & = & 1 \\ z & = & 0. \end{cases}$$

Donc (S) admet une unique solution : $(2,1,0)$.

Question 6

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \begin{cases} x-y+z & = & 1 \\ 2x-3y+4z & = & 1 \\ x-2y+3z & = & 1. \end{cases}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z & = & 1 \\ y-2z & = & 1. \end{cases}$
- ☐ [Faux] (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ [Faux] (S) admet une unique solution.
- ☐ [Vrai] (S) n'admet pas de solution.

Explications:

$$(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 1 \\ y-2z & = & 1 \\ y-2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x-y+z & = & 1 \\ y-2z & = & 1 \\ 0 & = & -1. \end{array}\right.$$

Donc (S) n'admet pas de solution.

1.2 Systèmes d'équations linéaires | Niveau 2

Question 7

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S}) \left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 1 \\ xy+z & = & 0 \\ x-y & = & -1. \end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] (S) est un système d'équations linéaires.
- ☐ [Vrai] (S) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} z & = & -2x \\ y & = & 1+x \\ xy+z & = & 0. \end{array}\right.$
- ☐ [Faux] (S) admet une unique solution.
- ☐ [Vrai] (S) admet deux solutions distinctes.

Explications: (S) n'est pas un système d'équations linéaires.

$$(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} z & = & 1-x-y \\ y & = & 1+x \\ xy+z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} z & = & -2x \\ y & = & 1+x \\ x(x-1) & = & 0. \end{array}\right.$$

Donc (S) admet deux solutions : $(0,1,0)$ et $(1,2,-2)$.

Question 8

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S}) \left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 1 \\ 2x+y-z & = & -1 \\ 3x+y-3z & = & -3 \\ x-2z & = & -2. \end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] (S) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ y+3z & = & 3. \end{array}\right.$
- ☐ [Vrai] L'ensemble des solutions de (S) est une droite.

- ☐ [Faux] (S) n'admet pas de solution.
- ☐ [Faux] (S) admet une unique solution.

Explications:

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ y+3z & = & 3. \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions de (S) est la droite : $\{(-2+2z, 3-3z, z)\,;\ z \in \mathbb{R}\}$.

1.3 Systèmes d'équations linéaires | Niveau 3

Question 9

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et de paramètres des réels a, b, c et d :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & a \\ y+z & = & b \\ z+t & = & c \\ t+x & = & d. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] (S) $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & a \\ y+z & = & b \\ z+t & = & c. \end{array} \right.$
- ☐ [Vrai] (S) admet une solution si et seulement si $a+c=b+d$.
- ☐ [Faux] (S) admet une solution si et seulement si $a+b=c+d$.
- ☐ [Vrai] Le rang de (S) est 3.

Explications:

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & a \\ y+z & = & b \\ z+t & = & c \\ 0 & = & b+d-a-c. \end{array} \right.$$

On en déduit que si $a+c \neq b+d$, (S) n'admet pas de solution et que si $a+c=b+d$, (S) en admet une infinité.

Question 10

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètres des réels non nuls et distincts a, b et c :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} ax+ay+bz & = & b \\ bx+by+cz & = & c \\ cx+cy+az & = & a. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] (S) $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} ax+ay+bz & = & b \\ (ac-b^2)z & = & ac-b^2 \\ (a^2-bc)z & = & a^2-bc. \end{array} \right.$

- ☐ [Faux] (S) n'admet pas de solution.
- ☐ [Faux] (S) admet une solution si et seulement si $a^2 \neq bc$.
- ☐ [Vrai] (S) admet une infinité de solutions.

Explications: Comme a, b et c sont des réels non nuls,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} ax + ay + bz & = & b \\ (ac - b^2)z & = & ac - b^2 \\ (a^2 - bc)z & = & a^2 - bc. \end{array} \right.$$

D'autre part, a, b, c sont des réels distincts, on vérifie que $a^2 \neq bc$ ou $b^2 \neq ac$. Par conséquent, (S) admet une infinité de solutions : $\{(x, -x, 1);\ x \in \mathbb{R}\}$.

Question 11
On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre un réel m :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & -1 \\ x + 2y + 3z & = & 1 \\ 2x + 3y + 4z & = & m. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] (S) $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & -1 \\ y + 2z & = & m. \end{array} \right.$
- ☐ [Faux] Pour tout réel m, (S) admet une solution.
- ☐ [Vrai] Si $m = 1$, (S) n'admet pas de solution.
- ☐ [Vrai] Si $m = 0$, l'ensemble des solutions de (S) est une droite.

Explications:

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & -1 \\ y + 2z & = & 2 \\ y + 2z & = & m + 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & -1 \\ y + 2z & = & 2 \\ 0 & = & m. \end{array} \right.$$

On en déduit que si $m \neq 0$, (S) n'admet pas de solution et que si $m = 0$, l'ensemble des solutions de (S) est la droite : $\{(-3 + z, 2 - 2z, z);\ z \in \mathbb{R}\}$.

Question 12
On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre un réel m :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 1 \\ -x + 2y - mz & = & -3 \\ 2x - y + (m - 1)z & = & 2m + 2. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Vrai] (S) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y-z &=& 1 \\ y-(m+1)z &=& -2 \\ (m+1)z &=& m+1. \end{array}\right.$

☐ [Faux] Pour tout réel m, (S) admet une infinité de solutions.

☐ [Faux] Si $m=-1$, (S) n'admet pas de solution.

☐ [Vrai] Si $m \neq -1$, (S) admet une unique solution.

Explications:

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y-z &=& 1 \\ y-(m+1)z &=& -2 \\ y+(m+1)z &=& 2m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y-z &=& 1 \\ y-(m+1)z &=& -2 \\ (m+1)z &=& m+1. \end{array}\right.$$

Si $m=-1$, (S) admet une infinité de solutions : $\{(-1+z,-2,z)\,;\, z\in\mathbb{R}\}$.
Si $m\neq -1$, (S) admet une unique solution : $(1+m,-1+m,1)$.

Question 13

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ et de paramètres des réels a et m :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x-z-t &=& 0 \\ -x+y+z &=& a \\ 2x+y-z &=& m \\ x-mz-t &=& a \\ x+y+t &=& m. \end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Vrai] (S) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-z-t &=& 0 \\ y-t &=& a \\ z+3t &=& m-a \\ (1-m)z &=& a. \end{array}\right.$

☐ [Faux] Si $m=1$ et $a=0$, (S) admet une unique solution.

☐ [Vrai] Si $m\neq 1$ et a un réel quelconque, (S) admet une unique solution.

☐ [Faux] Si $m\neq 1$ et $a\neq 0$, (S) admet une infinité de solutions.

Explications:

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-z-t &=& 0 \\ y-t &=& a \\ y+z+2t &=& m \\ (1-m)z &=& a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-z-t &=& 0 \\ y-t &=& a \\ z+3t &=& m-a \\ (1-m)z &=& a. \end{array}\right.$$

- Si $m=1$ et $a\neq 0$, (S) n'admet pas de solution.
- Si $m=1$ et $a=0$, (S) admet une infinité de solutions.
- Si $m\neq 1$, (S) admet une unique solution.

Question 14

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et de paramètre un réel m :

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz & = & 1\\ x+my+z & = & 1\\ mx+y+z & = & 1.\end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz & = & 1\\ (m-1)y+(1-m)z & = & 0\\ (1-m)z & = & 1-m.\end{array}\right.$
- ☐ [Vrai] Si $m=1$, (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ [Vrai] Si $m=-2$, (S) n'admet pas de solution.
- ☐ [Faux] Si $m\neq 1$, (S) admet une unique solution.

Explications:

$$(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz & = & 1\\ (m-1)y+(1-m)z & = & 0\\ (1-m)y+(1-m^2)z & = & 1-m\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz & = & 1\\ (m-1)y+(1-m)z & = & 0\\ (1-m)(2+m)z & = & 1-m.\end{array}\right.$$

- Si $m=1$, $(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow x+y+z=1$ admet une infinité de solutions.
- Si $m=-2$, (S) n'admet pas de solution.
- Si $m\neq 1$ et $m\neq -2$, (S) admet une unique solution.

Question 15

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ et de paramètre un réel m :

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+mt & = & 1\\ x+y+mz+t & = & 1\\ x+my+z+t & = & 1\\ mx+y+z+t & = & 1.\end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+mt & = & 1\\ (m-1)y+(1-m)t & = & 0\\ (m-1)z+(1-m)t & = & 0\\ (1-m)(3+m)t & = & 1-m.\end{array}\right.$
- ☐ [Vrai] Si $m=1$, (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ [Faux] Si $m=-3$, (S) admet une unique solution.
- ☐ [Faux] Si $m\neq 1$, (S) admet une unique solution.

Explications:

$$(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+mt & = & 1\\ (m-1)y+(1-m)t & = & 0\\ (m-1)z+(1-m)t & = & 0\\ (1-m)y+(1-m)z+(1-m^2)t & = & 1-m\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+mt & = & 1 \\ (m-1)y+(1-m)t & = & 0 \\ (m-1)z+(1-m)t & = & 0 \\ (1-m)(3+m)t & = & 1-m. \end{array} \right.$$

- Si $m=1$, (S) $\Leftrightarrow x+y+z+t=1$ admet une infinité de solutions.
- Si $m=-3$, (S) n'admet pas de solution.
- Si $m\neq 1$ et $m\neq -3$ (S) admet une unique solution.

Question 16
On considère le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et de paramètres des réels a,b et c :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x+ay+a^2z & = & 0 \\ x+by+b^2z & = & 0 \\ x+cy+c^2z & = & 0. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Vrai] (S) $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+ay+a^2z & = & 0 \\ (b-a)y+(b^2-a^2)z & = & 0 \\ (c-a)y+(c^2-a^2)z & = & 0. \end{array} \right.$

☐ [Faux] Si a,b et c sont des réels deux à deux distincts, (S) admet une infinité de solutions.

☐ [Faux] Si $a=b$ et $a\neq c$, (S) admet une unique solution.

☐ [Faux] $b=c$ et $a\neq c$, (S) n'admet pas de solution.

Explications:

$$(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+ay+a^2z & = & 0 \\ (b-a)y+(b^2-a^2)z & = & 0 \\ (c-a)y+(c^2-a^2)z & = & 0. \end{array} \right.$$

- Si $a=b=c$, (S) $\Leftrightarrow x+ay+a^2z=0$, (S) admet donc une infinité de solutions.
- Si $a=b$ et $a\neq c$, ou $a=c$ et $a\neq b$, ou $b=c$ et $b\neq a$, (S) admet une infinité de solutions.
- Si a,b,c sont deux à deux distincts, (S) admet donc une unique solution : $(0,0,0)$.

Question 17
On considère le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ et de paramètres des réels m et a :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+mt & = & 1 \\ x+y+mz+t & = & a \\ x+my+z+t & = & a^2 \\ mx+y+z+t & = & a^3. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] (S) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+mt &=& 1 \\ (m-1)y+(1-m)t &=& a^2-1 \\ (m-1)z+(1-m)t &=& a-1 \\ (1-m)(3+m)t &=& a^3+a^2+a-m-2. \end{array}\right.$
- ☐ [Faux] Si $m=1$, (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ [Faux] Si $m\neq 1$, (S) admet une unique solution.
- ☐ [Vrai] Si $m=-3$ et $a\neq -1$, (S) n'admet pas de solution.

Explications:

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+mt &=& 1 \\ (m-1)y+(1-m)t &=& a^2-1 \\ (m-1)z+(1-m)t &=& a-1 \\ (1-m)y+(1-m)z+(1-m^2)t &=& a^3-m \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+mt &=& 1 \\ (m-1)y+(1-m)t &=& a^2-1 \\ (m-1)z+(1-m)t &=& a-1 \\ (1-m)(3+m)t &=& a^3+a^2+a-m-2. \end{array}\right.$$

- Si $m=1$ et $a=1$, (S) $\Leftrightarrow x+y+z+t=1$ admet une infinité de solutions.
- Si $m=1$ et $a\neq 1$, (S) n'admet pas de solution.
- Si $m=-3$ et $a=-1$, (S) admet une infinité de solutions.
- Si $m=-3$ et $a\neq -1$, (S) n'admet pas de solution.
- Si $m\neq 1$ et $m\neq -3$, (S) admet une unique solution.

Question 18

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et de paramètres des réels a et m :

$$(S) \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z &=& 2 \\ x-y+z &=& 4 \\ 3x+3y-z &=& 4m \\ mx-y+z &=& 2a+2. \end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] (S) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 4 \\ y-z &=& -2 \\ z &=& 2m \\ 0 &=& m-a. \end{array}\right.$
- ☐ [Faux] Si $m=1$ et $a=-1$, (S) admet une unique solution.
- ☐ [Faux] Si $m=a$, (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ [Vrai] Si $m\neq a$, (S) n'admet pas de solution.

Explications:

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 4 \\ y-z &=& -2 \\ 3y-2z &=& 2m-6 \\ (m-1)y+(1-m)z &=& 2a-4m+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 4 \\ y-z &=& -2 \\ z &=& 2m \\ 0 &=& m-a. \end{array}\right.$$

Si $m = a$, (S) admet une unique solution et si $m \neq a$, (S) n'admet pas de solution.

Question 19
Soit (S) un système à 3 équations linéaires et 2 inconnues et (S_H) le système homogène associé. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] (S_H) admet au moins une solution.
- ☐ [Faux] (S) admet au moins une solution.
- ☐ [Faux] Si X_1 et X_2 sont des solutions de (S), alors $X_1 + X_2$ est une solution de (S).
- ☐ [Vrai] (S) admet une infinité de solutions si et seulement si les équations de (S) sont celles de trois droites confondues.

Explications: (S_H) admet au moins le zéro de l'espace comme solution. Les équations de (S) étant celles de 3 droites, 3 cas sont possibles :

- Les 3 droites sont confondues, dans ce cas, (S) admet une infinité de solutions.
- Les 3 droites se coupent en un point, dans ce cas, (S) admet une unique solution.
- L'intersection des 3 droites est vide, dans ce cas, (S) n'admet pas de solution.

Question 20
Soit (S) un système à 3 équations linéaires et 3 inconnues et (S_H) le système homogène associé. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] (S_H) admet une infinité de solutions.
- ☐ [Faux] (S) admet une unique solution.
- ☐ [Vrai] Si X_1 et X_2 sont des solutions de (S), alors $X_1 - X_2$ est une solution de (S_H).
- ☐ [Faux] (S) admet une infinité de solutions si et seulement si les équations de (S) sont celles de 3 plans confondus.

Explications: (S_H) admet au moins le zéro de l'espace comme solution, mais n'admet pas nécessairement une infinité de solutions. Les équations de (S) étant celles de 3 plans, 4 cas sont possibles :

- Les 3 plans sont confondus, dans ce cas, (S) admet une infinité de solutions.
- Les 3 plans se coupent en une droite, dans ce cas, (S) admet une infinité de solutions.
- Les 3 plans se coupent en un point, dans ce cas, (S) admet une unique solution.
- L'intersection des 3 plans est vide, dans ce cas, (S) n'admet pas de solution.

Question 21
Soit (S) un système d'équations linéaires et (S_E) un système échelonné obtenu par la méthode de résolution du pivot de Gauss. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] (S) admet une infinité de solutions si et seulement si toute équation de (S_E) dont le premier membre est nul a aussi son second membre nul.

☐ [Vrai] (S) n'admet pas de solution si et seulement s'il existe une équation de (S_E) ayant un premier membre nul et un second membre non nul.

☐ [Faux] (S) admet une unique solution si et seulement si le nombre d'équations de (S_E) dont le premier membre est non nul est égal au nombre d'inconnues.

☐ [Vrai] Si le nombre d'équations de (S_E) dont le premier membre est non nul est strictement inférieur au nombre d'inconnues et les équations ayant un premier membre nul admettent aussi le second membre nul, alors (S) admet une infinité de solutions.

Explications: D'après la méthode du pivot de Gauss, (S) admet une solution si et seulement si toute équation de (S_E) dont le premier membre est nul a aussi son second membre nul.

Question 22

Soit (S) un système à 4 équations et 3 inconnues, (S_E) un système échelonné obtenu par la méthode de résolution du pivot de Gauss et r le rang du système (S), c.à.d le nombre d'équations de (S_E) ayant un premier membre non nul. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Faux] Si $r = 1$, alors (S) admet une infinité de solutions.

☐ [Vrai] Si $r = 2$ et les équations ayant un premier membre nul admettent aussi le second membre nul, alors (S) admet une infinité de solutions.

☐ [Vrai] Si $r = 3$ et l'équation ayant un premier membre nul admet aussi le second membre nul, alors (S) admet une unique solution.

☐ [Faux] Si $r = 3$, alors (S) admet une unique solution.

Explications: D'après la méthode du pivot de Gauss, (S) admet une solution si et seulement si toute équation de (S_E) dont le premier membre est nul a aussi son second membre nul.

Question 23

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $\leqslant 3$ vérifiant les conditions :

$$P(1) = 1, \quad P(0) = 1, \quad P(-1) = -1 \quad \text{et} \quad P'(1) = 3.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Faux] Un tel polynôme P n'existe pas.

☐ [Faux] Il existe une infinité de polynômes P vérifiant ces conditions.

☐ [Vrai] Il existe un unique polynôme P vérifiant ces conditions.

☐ [Faux] Si P est un polynôme qui vérifie ces conditions, alors $P(2) = 2$.

Explications: On pose : $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, où a, b, c et d sont des réels à déterminer. En résolvant le système :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcr} P(1) & = & 1 \\ P(0) & = & 1 \\ P(-1) & = & -1 \\ P'(1) & = & 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} a+b+c+d & = & 1 \\ d & = & 1 \\ -a+b-c+d & = & -1 \\ 3a+2b+c & = & 3. \end{array} \right.$$

On obtient : $P(X) = 2X^3 - X^2 - X + 1$. Par conséquent il existe un unique polynôme vérifiant les conditions ci-dessus et $P(2) = 11$.

1.4 Systèmes d'équations linéaires | Niveau 4

Question 24

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$:

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + ax_n & = & 1 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + ax_{n-1} + x_n & = & 1 \\ x_1 + x_2 + \cdots + ax_{n-2} + x_{n-1} + x_n & = & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ax_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n & = & 1, \end{array}\right.$$

où a est un paramètre réel. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] (S) $\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + ax_n & = & 1 \\ (a-1)[x_{n-1} - x_n] & = & 0 \\ (a-1)[x_{n-2} - x_n] & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (a-1)[x_2 - x_n] & = & 0 \\ (1-a)[x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + (1+a)x_n] & = & 1-a. \end{array}\right.$
- ☐ [Vrai] Si $a = 1$, (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ [Faux] Si $a \neq 1$, (S) admet une unique solution.
- ☐ [Vrai] $a = 1 - n$, (S) n'admet pas de solution.

Explications:

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + ax_n & = & 1 \\ (a-1)[x_{n-1} - x_n] & = & 0 \\ (a-1)[x_{n-2} - x_n] & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (a-1)[x_2 - x_n] & = & 0 \\ (1-a)[x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + (1+a)x_n] & = & 1-a. \end{array}\right.$$

- Si $a = 1$, (S) $\Longleftrightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$, donc (S) admet une infinité de solutions.
- Si $a \neq 1$,

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + ax_n & = & 1 \\ x_{n-1} & = & x_n \\ x_{n-2} & = & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2 & = & x_n \\ (n-1+a)x_n & = & 1. \end{array}\right.$$

- Si $a = 1 - n$, (S) n'admet pas de solution.
- Si $a \neq 1 - n$, (S) admet une unique solution.

Question 25

On considère le système d'équations, d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$: et de paramètre des réels a, b :

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+\dots \quad \dots+x_n & = & 1 \\ ax_1+bx_2+bx_3+\dots+bx_n & = & 1 \\ ax_1+ax_2+bx_3+\dots+bx_n & = & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ax_1+\dots+ax_{n-1}+bx_n & = & 1, \end{array}\right.$$

où a et b sont des paramètre réels. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+\dots+x_n & = & 1 \\ (b-a)[x_2+x_3+\dots+x_n] & = & 1-a \\ (b-a)[x_3+\dots+x_n] & = & 1-a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (b-a)x_n & = & 1-a. \end{array}\right.$
- ☐ [Faux] Si $a=b$, (S) admet une infinité de solutions.
- ☐ [Faux] Si $a \neq b$, (S) n'admet pas de solution.
- ☐ [Vrai] (S) admet une infinité de solutions si et seulement si $a=b=1$.

Explications: L'algorithme de Gauss donne :

$$(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+\dots+x_n & = & 1 \\ (b-a)[x_2+x_3+\dots+x_n] & = & 1-a \\ (b-a)[x_3+\dots+x_n] & = & 1-a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (b-a)x_n & = & 1-a. \end{array}\right.$$

- Si $a=b=1$, le système $(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow x_1+x_2+\dots+x_n=1$. Donc (S) admet une infinité de solutions.
- Si $a=b\neq 1$, (S) n'admet pas de solution.
- Si $a \neq b$, (S) admet une unique solution.

Question 26

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $\leqslant 11$ vérifiant les conditions :

$$P(1)=1!, \quad P'(1)=2!, \quad P''(1)=3!, \dots, \quad P^{(10)}(1)=11!.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Un tel polynôme P n'existe pas.
- ☐ [Vrai] Il existe une infnité de polynômes P vérifiant ces conditions.
- ☐ [Faux] Il existe un unique polynôme P vérifiant ces conditions.
- ☐ [Faux] Si P est un polynôme qui vérifie ces conditions, alors $P(X)=1+2(X-1)+3(X-1)^2+\dots+11(X-1)^{10}+12(X-1)^{11}$.

Explications: On peut résoudre un système dont les inconnues (12 inconnues) sont les coefficients du polynôme, mais cela est long ! Par contre, en appliquant la formule de Taylor à P, au voisinage de 1, on a :

$$P(X) = P(1) + (X-1)\frac{P'(1)}{1!} + (X-1)^2\frac{P''(1)}{2!} + \cdots + (X-1)^{11}\frac{P^{(11)}(1)}{11!}.$$

En utilisant les conditions que doit vérifier P, on obtient :

$$P(X) = 1 + 2(X-1) + 3(X-1)^2 + \cdots + 11(X-1)^{10} + a(X-1)^{11},$$

où a est un réel. Par conséquent, il existe une infinité de polynômes vérifiant les conditions ci-dessus.

yste

Espaces vectoriels

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

2 Espaces vectoriels

2.1 Espaces vectoriels | Niveau 1

Question 27

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x + y = 1\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel, car E est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
- ☐ [Vrai] E n'est pas un espace vectoriel, car $(0,0) \notin E$.
- ☐ [Vrai] E n'est pas un espace vectoriel, car $(1,0) \in E$, mais $(-1,0) \notin E$.
- ☐ [Vrai] E n'est pas un espace vectoriel, car $(1,0) \in E$ et $(0,1) \in E$, mais $(1,1) \notin E$.

Explications: E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, puisque $(0,0) \notin E$.
E n'est pas stable par multiplication par un scalaire : $(1,0) \in E$, mais, $-(1,0) = (-1,0) \notin E$.
E n'est pas stable par addition : $(1,0) \in E$ et $(0,1) \in E$, mais $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin E$.

Question 28

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x - y + z = 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $(0,0,0) \in E$.

- ☐ [Faux] E n'est pas stable par addition.
- ☐ [Vrai] E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ [Vrai] E est un espace vectoriel.

Explications: E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puisque $(0,0,0) \in E$, E est stable par addition et multiplication par un scalaire.

Question 29
Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x - y \geqslant 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] E est non vide.
- ☐ [Vrai] E est stable par addition.
- ☐ [Faux] E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ [Faux] E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Explications: E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, puisque E n'est pas stable par multiplication par un scalaire : $(1,0) \in E$, mais, $-(1,0) = (-1,0) \notin E$. Cependant, E est stable par addition.

Question 30
Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x - y + z = x + y - 3z = 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] E est non vide.
- ☐ [Faux] E n'est pas stable par addition.
- ☐ [Vrai] E est un espace vectoriel.
- ☐ [Vrai] $E = \{(x,2x,x)\,;\ x \in \mathbb{R}\}$.

Explications: E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puisque $(0,0,0) \in E$, E est stable par addition et multiplication par un scalaire.
En résolvant le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x - y + z & = & 0 \\ x + y - 3z & = & 0 \end{array}\right.$, on obtient : $E = \{(x,2x,x)\,;\ x \in \mathbb{R}\}$.

2.2 Espaces vectoriels | Niveau 2

Question 31
Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ xy + xz + yz = 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $(0,0,0) \in E$.
- ☐ [Vrai] E n'est pas stable par addition.
- ☐ [Vrai] E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ [Faux] E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Explications: E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puisque E n'est pas stable par addition : $(1,0,0),(0,1,0) \in E$, mais $(1,1,0) \notin E$. Cependant, E est stable par multipliction par un scalaire.

Question 32

Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; (x+y)(x+z) = 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; x+y = x+z = 0\}$.
- ☐ [Faux] $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; x+y = 0\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\; x+z = 0\}$.
- ☐ [Vrai] $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; x+y = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\; x+z = 0\}$.
- ☐ [Vrai] E n'est pas un espace vectoriel, car E n'est pas stable par addition.

Explications: $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; x+y = 0 \text{ ou } x+z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; x+y = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; x+z = 0\}$. E n'est pas un espace vectoriel, car E n'est pas stable par addition : $(1,-1,0),(1,0,-1) \in E$, mais, $(2,-1,-1) \notin E$.

Question 33

Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; e^x e^y = 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; x = y\}$.
- ☐ [Faux] $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; x = -y\}$.
- ☐ [Faux] $E = \{(0,0)\}$.
- ☐ [Vrai] E n'est pas un espace vectoriel.

Explications: E est vide, donc E n'est pas un espace vectoriel.

Question 34

Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; e^x e^y = 1\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; x = y\}$.
- ☐ [Vrai] $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; x = -y\}$.
- ☐ [Faux] E est vide.
- ☐ [Vrai] E est un espace vectoriel.

Explications: $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; x+y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Question 35

Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; e^x - e^y = 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $E = \{(0,0)\}$.
- ☐ [Faux] $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x = y \geqslant 0\}$.
- ☐ [Vrai] $E = \{(x,x)\,;\; x \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ [Vrai] E est un espace vectoriel.

Explications: $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x = y\} = \{(x,x)\;;\; x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Question 36

Soit E un espace vectoriel. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E peut être vide.
- ☐ [Faux] Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F contient toute combinaison linéaire d'éléments de E.
- ☐ [Vrai] Il existe un sous-espace vectoriel de E qui contient un seul élément.
- ☐ [Vrai] Si F est un sous-ensemble non vide de E qui contient toute combinaison linéaire de deux vecteurs de F, alors F est un sous-espace vectoriel de E.

Explications: L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E contient au moins le vecteur nul. Le seul sous-espace vectoriel de E qui contient un seul élément est $\{0_E\}$, où 0_E est le zéro de E.
Un sous-ensemble non vide de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement s'il contient toute combinaison linéaire d'éléments de F. Ceci revient à dire que F contient toute combinaison linéaire de deux éléments de F.

Question 37

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul et F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \not\subseteq G$ et $G \not\subseteq F$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $F + G = \{x + y\,;\, x \in F \text{ et } y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- ☐ [Vrai] $F \cap G$ est sous-espace vectoriel de E.
- ☐ [Faux] $F \cup G$ est sous-espace vectoriel de E.
- ☐ [Vrai] $F \times G = \{(x,y)\,;\, x \in F \text{ et } y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de $E \times E$.

Explications: La somme, l'intersection et le produit cartésien de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel. Par contre, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est un espace vectoriel que si l'un des deux est inclus dans l'autre.

Question 38

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles.
- ☐ [Vrai] Les sous-espaces vectoriels non nuls de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles et $\mathbb{R}^2$.
- ☐ [Faux] Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont les plans vectoriels.

- ☐ [Vrai] Les sous-espaces vectoriels non nuls de $\mathbb{R}^3$ qui sont strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$ sont les droites vectorielles et les plans vectoriels.

Explications: Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont : $\{(0,0)\}$, les droites vectorielles et $\mathbb{R}^2$. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont : $\{(0,0,0)\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels et $\mathbb{R}^3$.

2.3 Espaces vectoriels | Niveau 3

Question 39
Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2, muni des opérations usuelles et $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X]\,;\ P(1) = 1\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] E est vide.
- ☐ [Faux] E est stable par addition.
- ☐ [Vrai] E n'est pas stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ [Vrai] E n'est pas un espace vectoriel.

Explications: E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, puisque le polynôme nul n'appartient pas à E. E n'est stable ni par addition ni par multiplication par un scalaire.

Question 40
Soit n un entier $\geqslant 1$ et $E = \{P \in \mathbb{R}[X]\,;\, \deg P = n\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $0 \in E$.
- ☐ [Faux] E est stable par addition.
- ☐ [Faux] E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ [Vrai] E n'est pas un espace vectoriel.

Explications: L'ensemble E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car le polynôme nul n'appartient pas à E ($\deg 0 = -\infty$). L'ensemble E n'est stable ni par addition ni par multiplication par le scalaire zéro.

Question 41
Soit n un entier $\geqslant 1$ et $E = \{P \in \mathbb{R}[X]\,;\, \deg P < n\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $0 \notin E$.
- ☐ [Vrai] E est stable par addition.
- ☐ [Vrai] E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ [Faux] E n'est pas un espace vectoriel.

Explications: On a : $0 \in E$ et on vérifie que E est stable par addition et multiplication par un scalaire. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2.4 Espaces vectoriels | Niveau 4

Question 42
Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ f$ est croissante sur $\mathbb{R}\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] La fonction nulle appartient à E.
- ☐ [Vrai] E est stable par addition.
- ☐ [Faux] E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel.

Explications: La fonction nulle appartient à E, puisqu'elle est constante.
On vérifie que E est stable par addition. Par contre, E ne l'est pas par multiplication par un scalaire < 0. Donc E n'est pas un espace vectoriel.

Question 43
Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ f$ est bornée sur $\mathbb{R}\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] La fonction nulle n'appartient pas à E.
- ☐ [Vrai] E est stable par addition.
- ☐ [Vrai] E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ [Faux] E n'est pas un espace vectoriel.

Explications: La fonction nulle appartient à E, et E est stable par addition et par multiplication par un scalaire. Donc E est un espace vectoriel.

Question 44
Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(1) = 1\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] La fonction nulle n'appartient pas à E.
- ☐ [Faux] E est stable par addition.
- ☐ [Faux] E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ [Vrai] E n'est pas un espace vectoriel.

Explications: La fonction nulle n'appartient pas à E, donc E n'est pas un espace vectoriel. On vérifie que E est n'est stable ni par addition ni par multiplication par un scalaire.

Question 45
Soit $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(1) = 0\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] La fonction nulle appartient à E.
- ☐ [Vrai] E est stable par addition.
- ☐ [Vrai] E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ [Faux] E n'est pas un espace vectoriel.

Explications: La fonction nulle appartient à E, et E est stable par addition et par multiplication par un scalaire. Donc E est un espace vectoriel.

Question 46

Soit $E = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \,;\, f \text{ est continue sur } [0,1] \text{ et } \int_0^1 f(t)\,dt = 1 \right\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] La fonction nulle appartient à E.
- ☐ [Faux] E est stable par addition.
- ☐ [Faux] E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ [Vrai] E n'est pas un espace vectoriel.

Explications: La fonction nulle n'appartient pas à E, donc E n'est pas un espace vectoriel. Par ailleurs, E n'est sable ni par addition ni par multiplication par un scalaire.

Question 47

Soit $E = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \,;\, f \text{ est continue sur } [0,1] \text{ et } \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] La fonction nulle appartient à E.
- ☐ [Vrai] E est stable par addition.
- ☐ [Faux] E n'est pas stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ [Vrai] E est un espace vectoriel.

Explications: La fonction nulle appartient à E, et E est stable par addition et par multiplication par un scalaire. Donc E est un espace vectoriel.

Question 48

On considère $E = (\mathbb{R}^*)^2$ muni de l'addition et la multiplication par un réel suivantes :

$$(x,y) + (x',y') = (xx', yy') \quad \text{et} \quad \lambda.(x,y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ [Faux] L'élément neutre pour l'addition est $(0,0)$.
- ☐ [Vrai] L'inverse, pour l'addition, de (x,y) est $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.
- ☐ [Faux] E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Explications: On vérifie que l'élément neutre pour l'addition est $(1,1)$, que l'inverse pour l'addition d'un couple $(x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ est $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ et que E n'est pas stable par multiplication par le scalaire zéro. Par conséquent, E n'est pas un espace vectoriel.

Question 49

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et la multiplication par un réel suivantes :

$$(x,y)+(x',y')=(x+y',x'+y) \quad \text{et} \quad \lambda.(x,y)=(\lambda x,\lambda y).$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] E est stable par addition et par multiplication par un scalaire.
- ☐ [Faux] L'addition est commutative.
- ☐ [Faux] L'élément neutre pour l'addition est $(0,0)$.
- ☐ [Faux] E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Explications: E est stable par addition et multiplication par un scalaire. On voit que

$$(1,0)+(0,0)=(1,0) \quad \text{et} \quad (0,0)+(1,0)=(0,1)\neq(1,0).$$

On en déduit que l'addition n'est pas commutative et que $(0,0)$ n'est pas un élément neutre pour cette addition. En particulier, E n'est pas un espace vectoriel.

Question 50

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et la multiplication par un réel suivantes :

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \quad \text{et} \quad \lambda.(x,y)=(\lambda x,y).$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] E est stable par addition et multiplication par un scalaire.
- ☐ [Vrai] L'élément neutre pour l'addition est $(0,0)$.
- ☐ [Vrai] La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition.
- ☐ [Faux] E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Explications: On vérifie que E est stable par addition et multiplication par un scalaire, que l'élément neutre pour l'addition est $(0,0)$ et que la multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition. Par contre, E n'est pas un espace vectoriel, puisque $0.(0,1)=(0,1)\neq(0,0)$.

Question 51

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et la multiplication par un réel suivantes :

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \quad \text{et} \quad \lambda.(x,y)=(\lambda^2 x,\lambda^2 y).$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] L'élément neutre pour l'addition est $(0,0)$.
- ☐ [Vrai] La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition.
- ☐ [Faux] L'addition dans $\mathbb{R}$ est distributive par rapport à la multiplication définie ci-dessus.
- ☐ [Faux] E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Explications: On vérifie que E est stable par addition et multiplication par un scalaire, que l'élément neutre pour l'addition est $(0,0)$ et que la multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition. Par contre, E n'est pas un espace vectoriel, puisque l'addition dans $\mathbb{R}$ n'est pas distributive par rapport à la multiplication par un élément de E : $(1+1).(0,1) = 2.(0,1) = (0,4)$, mais, $1.(0,1)+1.(0,1) = (0,1)+(0,1) = (0,2)$.

2.5 Base et dimension | Niveau 1

Question 52
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,-1)$ et $u_3 = (-1,0,-1)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre.
- ☐ [Faux] $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ [Vrai] u_3 est une combinaison linéaire de u_1 et u_2.
- ☐ [Faux] $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Explications: On vérifie que $u_3 = u_2 - u_1$, donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas libre. Par conséquent, $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$, sinon, $\{u_1, u_2\}$ serait aussi génératrice de $\mathbb{R}^3$, ce qui contredirait le fait que toute famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ doit contenir au moins 3 vecteurs non nuls.

Question 53
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (-1,1,0)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre.
- ☐ [Vrai] $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ [Faux] u_2 est une combinaison linéaire de u_1 et u_3.
- ☐ [Faux] $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Explications: On vérifie que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre. Comme cette famille contient 3 vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$ et la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3, elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$ et donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Question 54
Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - y - z = 0\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\dim E = 3$.

- ☐ [Vrai] $\dim E = 2$.
- ☐ [Faux] $\dim E = 1$.
- ☐ [Vrai] $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$ est une base de E.

Explications: E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par une équation linéaire homogène, donc $\dim E = 3-1 = 2$. On vérifie que $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$ est une base de E.

2.6 Base et dimension | Niveau 2

Question 55
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u_1 = (-1,1,2), \quad u_2 = (0,1,1), \quad u_3 = (-1,0,1), \quad u_4 = (0,2,1).$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Le rang de la famille $\{u_1,u_2\}$ est 2.
- ☐ [Faux] Le rang de la famille $\{u_1,u_2,u_3\}$ est 3.
- ☐ [Faux] Le rang de la famille $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ est 4.
- ☐ [Vrai] Le rang de la famille $\{u_1,u_2,u_4\}$ est 3.

Explications: Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs. Autrement dit, c'est le nombre maximum de vecteurs de cette famille qui sont linéairement indépendants. On vérifie que $u_1 = u_2 + u_3$ et que $\{u_1,u_2,u_4\}$ est libre.

Question 56
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1,1,-1,0)$, $u_2 = (0,1,1,1)$ et $u_3 = (1,-1,a,b)$, où a et b sont des réels. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\forall\, a,b \in \mathbb{R}, u_3 \notin \mathrm{Vect}\{u_1,u_2\}$.
- ☐ [Vrai] $\exists\, a,b \in \mathbb{R}, u_3 \in \mathrm{Vect}\{u_1,u_2\}$.
- ☐ [Vrai] $u_3 \in \mathrm{Vect}\{u_1,u_2\}$ si et seulement si $a = -3$ et $b = -2$.
- ☐ [Faux] $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, $\{u_1,u_2,u_3\}$ est libre.

Explications: $u_3 \in \mathrm{Vect}\{u_1,u_2\}$ si, et seulement si, il existe $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tels que $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$. En résolvant ce système, on obtient $b = -2$ et $a = -3$. Pour $a = -3$ et $b = -2$, la famille $\{u_1,u_2,u_3\}$ n'est pas libre.

Question 57
Dans $\mathbb{R}_1[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 1$, on considère les polynômes $P_1 = X+1, P_2 = X-1, P_3 = 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\{P_1,P_2,P_3\}$ est une famille libre.
- ☐ [Vrai] $\{P_1,P_2,P_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$.

- ☐ [Faux] $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
- ☐ [Vrai] $\{P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

Explications: On a : $P_1 - P_2 - 2P_3 = 0$, donc $\{P_1, P_2, P_3\}$ n'est pas libre. Par contre, $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$ puisqu'elle contient 2 polynômes non colinéaires. Toute famille extraite de $\{P_1, P_2, P_3\}$, contenant 2 vecteurs, est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

Question 58

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$, on considère les polynômes $P_1 = X, P_2 = X(X+1), P_3 = (X+1)^2$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre.
- ☐ [Faux] $\{P_1 + P_2, P_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ☐ [Vrai] $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ☐ [Faux] $\{P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Explications: On vérifie que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. De plus, cette famille contient 3 polynômes et la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ est 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Question 59

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$, on considère les polynômes $P_1 = 1-X, P_2 = 1+X, P_3 = X^2$ et $P_4 = 1+X^2$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Le rang de la famille $\{P_4\}$ est 4.
- ☐ [Vrai] Le rang de la famille $\{P_3, P_4\}$ est 2.
- ☐ [Faux] Le rang de la famille $\{P_2, P_3, P_4\}$ est 2.
- ☐ [Vrai] Le rang de la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est 3.

Explications: Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs. Autrement dit, c'est le nombre maximum de vecteurs de cette famille qui sont linéairement indépendants.

Question 60

Soit $E\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\, x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] E est un espace vectoriel de dimension 0.
- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel de dimension 1.
- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel de dimension 2.
- ☐ [Faux] E n'est pas un espace vectoriel.

Explications: $E = \{(0,0,0,0)\}$ est un espace vectoriel de dimension 0.

Question 61

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\, |x+y|e^{z+t} = 0\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel de dimension 1.
- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel de dimension 2.
- ☐ [Vrai] E est un espace vectoriel de dimension 3.
- ☐ [Faux] E n'est pas un espace vectoriel.

Explications: On vérifie que : $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\, x + y = 0\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$, où $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$ et $v_3 = (0, 0, 0, 1)$. On vérifie que cette famille est libre et donc c'est une base de E. Par conséquent, la dimension de E est 3.

Question 62
Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\; y - x + z = 0 \text{ et } x = 2y\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\{(2, 1, 1)\}$ est une base de E.
- ☐ [Faux] $\dim E = 3$.
- ☐ [Faux] E est un plan.
- ☐ [Vrai] $E = \mathrm{Vect}\{(2, 1, 1)\}$.

Explications: E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par un système d'équations linéaires homogènes de rang 2, donc $\dim E = 3 - 2 = 1$. Comme $(2, 1, 1)$ est un vecteur non nul de E et $\dim E = 1$, $\{(2, 1, 1)\}$ est une base de E.

Question 63
Soit $E = \{(x + z, z, z)\,;\, x, z \in \mathbb{R}\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ est une base de E.
- ☐ [Vrai] $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ est une base de E.
- ☐ [Vrai] $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ est une base de E.
- ☐ [Faux] $\dim E = 3$.

Explications: On vérifie que : $E = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$. Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une base de E et donc $\dim E = 2$.

2.7 Base et dimension | Niveau 3

Question 64
Dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, on considère les polynômes $P_1 = X^3 + 1, P_2 = P_1'$ (la dérivée de P_1) et $P_3 = P_1''$ (la dérivée seconde de P_1). Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Le rang de la famille $\{P_1, P_3\}$ est 3.
- ☐ [Faux] $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.
- ☐ [Vrai] $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.
- ☐ [Vrai] Le rang de la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est 3.

Explications: On vérifie que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ (ce sont des polynômes de degrés distincts). Par contre, elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$, puisque la dimension de cet espace est 4.

Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs. Autrement dit, c'est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants de cette famille.

Question 65

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 etv_1, v_2, v_3 des vecteurs linéairement indépendants de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille génératrice de E.
- ☐ [Vrai] $\{v_1, v_2, v_1 + v_3\}$ est une base de E.
- ☐ [Faux] $\{v_1 - v_2, v_1 + v_3\}$ est une base de E.
- ☐ [Vrai] $\{v_1 - v_2, v_1 + v_3\}$ est famille libre de E.

Explications: Puisque $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille libre qui contient 3 vecteurs et la dimension de E est 3, elle est génératrice et donc c'est une base de E.

On vérifie aussi que $\{v_1, v_2, v_1 + v_3\}$ est une famille libre, et donc pour les mêmes raisons que précédemment, c'est une base de E.

Question 66

Soit $E\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\,(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = 0\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel de dimension 0.
- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel de dimension 1.
- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel de dimension 2.
- ☐ [Vrai] E n'est pas un espace vectoriel.

Explications: $E = \{(0, 0, z, t)\,;\, z, t \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y, 0, 0)\,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un espace vectoriel.

Question 67

Soit n un entier $\geqslant 3$ et $E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,;\, x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\dim E = n - 1$.
- ☐ [Faux] $\dim E = n$.
- ☐ [Vrai] $\dim E = 1$.
- ☐ [Faux] $E = \mathbb{R}$.

Explications: On a : $E = \mathrm{Vect}\{v\}$, où $v = (1, 1, \ldots, 1)$. Par conséquent, E est un espace vectoriel de dimension 1.

Question 68
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (1,0,1), u_2 = (-1,1,1)$, $u_3 = (1,-1,0)$ et on considère les sous-espaces vectoriels $E = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$ et $F = \mathrm{Vect}\{u_3\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] E est un plan vectoriel.
- ☐ [Faux] Une équation cartésienne de E est $x + 2y + z = 0$.
- ☐ [Vrai] F est une droite vectorielle.
- ☐ [Faux] Une équation cartésienne de F est $z = 0$.

Explications: E est un plan vectoriel. Soit $M(x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. $M \in E$ si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $M = au_1 + bu_2$. En résolvant ce système, on obtient une équation cartésienne de E : $x + 2y - z = 0$.

F est une droite vectorielle ; c'est donc l'intersection de deux plans de $\mathbb{R}^3$. Soit $M(x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. $M \in F$ si et seulement s'il existe un réel a tels que $M = au_3$. En résolvant ce système, on obtient une représentation cartésienne de F : $(\mathrm{S})\begin{cases} x+y &= 0 \\ z &= 0. \end{cases}$

Question 69
On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$. Soit

$$E = \{P \in \mathbb{R}_2[X]\,;\, P(1) = P'(1) = 0\},$$

où P' est la dérivée de P. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\{X - 1\}$ est une base de E.
- ☐ [Vrai] $\{(X - 1)^2\}$ est une base de E.
- ☐ [Faux] $\dim E = 2$.
- ☐ [Vrai] $\dim E = 1$.

Explications: $E = \{aX^2 + bX + c\ ,\ a, b \in \mathbb{R}\ ;\ a + b + c = 2a + b = 0\} = \mathrm{Vect}\{X^2 - 2X + 1\}$. Donc $\{(X - 1)^2\}$ est une base de E et $\dim E = 1$.

Question 70
Soit $E = \{P = aX^3 + b(X^3 - 1)\,;\, a, b \in \mathbb{R}\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\dim E = 3$.
- ☐ [Vrai] $\{1, X^3\}$ est une base de E.
- ☐ [Faux] $\{X^3 - 1\}$ est une base de E.
- ☐ [Faux] $\dim E = 1$.

Explications: $E = \mathrm{Vect}\{X^3, X^3 - 1\} = \mathrm{Vect}\{1, X^3\}$. Comme 1 et X^3 ne sont pas colinéaires, on déduit que $\{1, X^3\}$ est une base de E et que $\dim E = 2$.

Question 71
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\{1\}$ est une base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ☐ [Vrai] $\{\sqrt{2}\}$ est une base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ☐ [Faux] $\{1, \sqrt{2}\}$ est une base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ☐ [Faux] $\{1, \sqrt{2}\}$ est une base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Explications: $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1, donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\{\alpha\}$ est une base de $\mathbb{R}$.

$\{1, \sqrt{2}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. En effet, sinon, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tels que $\sqrt{3} = \alpha + \beta\sqrt{2}$. En considérant le carré de cette égalité, on déduit que $\sqrt{2}$ est un rationnel, ce qui est absurde.

Question 72
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\{1\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ☐ [Vrai] $\{i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- ☐ [Vrai] $\{i, 1+i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ☐ [Faux] 1 et i sont $\mathbb{C}$ linéairement indépendants.

Explications: $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 et c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\{\alpha\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ tels que $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{R}$, $\{\alpha, \beta\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Question 73
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\{(1,0),(1,1)\}$ est une base de $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- ☐ [Vrai] La dimension de $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel est 4.
- ☐ [Vrai] $\{(1,0),(0,i),(i,0),(0,1)\}$ est une base de $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ☐ [Faux] La dimension de $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel est 2.

Explications: L'espace $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2. Par conséquent, pour tous $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}^2$, non colinéaires sur $\mathbb{C}$, $\{(a,b),(c,d)\}$ est une $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}^2$.

D'autre part $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4. Par conséquent, toute famille $\{(a,b),(a',b'),(c,d),(c',d')\}$, de vecteurs de $\mathbb{C}^2$ linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$, est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}^2$.

2.8 Base et dimension | Niveau 4

Question 74
Soit n et p deux entiers tels que $n > p \geqslant 1$, E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, et $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs linéairement indépendants de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ est une base de E.
- ☐ [Vrai] Il existe des vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ de E tels que $\{v_1, v_2, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_k\}$ soit une base de E.
- ☐ [Vrai] $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}\}$ est une famille libre de E.
- ☐ [Faux] $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ est une famille génératrice de E.

Explications: Comme $\dim E = n$ et $n > p$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ n'est pas une famille génératrice de E. Puisque cette famille est libre, d'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter pour avoir une base de E.

D'autre part, $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}\}$ est libre, puisque toute famille extraite d'une famille libre est libre.

Question 75
On considère les fonctions réelles f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = \sin x \cos x$$

et E l'espace engendré par ces fonctions. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\{f_1, f_2\}$ est une base de E.
- ☐ [Faux] $\{f_1, f_3\}$ est une base de E.
- ☐ [Faux] $\dim E = 2$.
- ☐ [Vrai] $\dim E = 3$.

Explications: Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$. Alors,

$$a \sin x + b \cos x + c \sin x \cos x = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En prenant $x = 0$, puis, $x = \frac{\pi}{2}$, on démontre que $b = a = c = 0$. Par conséquent, $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E et donc $\dim E = 3$.

Question 76
Soit n un entier $\geqslant 2$. On considère les fonctions réelles $f_1, f_2, \ldots, f_n$, définies par :

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{2x}, \quad \ldots, \quad f_n(x) = e^{nx}$$

et E l'espace vectoriel engendré par ces fonctions. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel de dimension $n-2$.
- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel de dimension $n-1$.
- ☐ [Vrai] E est un espace vectoriel de dimension n.
- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel de dimension infinie.

Explications: Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_1 e^x + \cdots + \lambda_n e^{2x} = 0$, pour tout réel x. En divisant par e^x et en faisant tendre x vers $-\infty$, on obtient $\lambda_1 = 0$. Puis, en divisant par e^{2x} et en faisant tendre x vers $-\infty$, on obtient $\lambda_2 = 0$. En appliquant ce raisonnement n fois, on démontre que tous les λ_i sont nuls. Par conséquent, $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ est une base de E et donc $\dim E = n$.

2.9 Espaces vectoriels supplémentaires | Niveau 1

Question 77
On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$E = \text{vect}\{u_1, u_2, u_3\},\ \text{où } u_1 = (1, -1, 0, 1),\ u_2 = (1, 0, 1, 0),\ u_3 = (3, -1, 1, 2)$$

et

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\, x + y - z = 0 \text{ et } y + z = 0\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\dim E = 3$.
- ☐ [Vrai] $\dim E \cap F = 1$.
- ☐ [Vrai] $E + F = \mathbb{R}^4$.
- ☐ [Faux] E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Explications: On vérifie que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre et que $F = \text{vect}\{v_1, v_2\}$, où $v_1 = (2, -1, 1, 0)$ et $v_2 = (0, 0, 0, 1)$. Par conséquent, $\dim E = 3$ et $\dim F = 2$.
Il y a une seule relation de dépendance entre u_1, u_2, u_3, v_1 et v_2. Soit : $u_1 + u_2 - v_1 - v_2 = 0$. On déduit que $\{u_1, u_2, u_3, v_1\}$ est une base de $E + F$, donc $\dim(E + F) = 4$ et comme $E + F$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ et $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, $E + F = \mathbb{R}^4$. Du théorème de la dimension d'une somme, on déduit que $\dim E \cap F = 1$, donc E et F ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Question 78
On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\, x + y = y + z = 0\} \ \text{ et } \ F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\, x + y + z + t = 0\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\dim E = 1$.
- ☐ [Vrai] $\dim F = 3$.
- ☐ [Vrai] $\dim E \cap F = 1$.
- ☐ [Faux] E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Explications: Une base de E est $\{u_1, u_2\}$, où $u_1 = (1, -1, 1, 0)$ et $u_2 = (0, 0, 0, 1)$, donc $\dim E = 2$. Une base de F est $\{v_1, v_2, v_3\}$, où $v_1 = (1, 0, 0, -1), v_2 = (0, 1, 0, -1)$ et $v_3 = (0, 0, 1, -1)$, donc $\dim F = 3$. $E \cap F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\, x + y = y + z = z + t = 0\}$. Une base de $E \cap F$ est $\{w\}$, où $w = (1, -1, 1, -1)$, donc $\dim E \cap F = 1$ et donc E et F ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Question 79
On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\ x - y = y - z = t = 0\} \ \text{ et } \ F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\ z = x + y\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\dim E = 1$.
- ☐ [Faux] $\dim F = 2$.
- ☐ [Faux] $\dim E \cap F = 1$.
- ☐ [Vrai] E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Explications: Une base de E est $\{u\}$, où $u = (1,1,1,0)$, donc $\dim E = 1$. Une base de F est $\{v_1, v_2, v_3\}$, où $v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (0,1,1,0)$ et $v_3 = (0,0,0,1)$, donc $\dim F = 3$. On vérifie que $E \cap F = \{(0,0,0,0)\}$. Donc, d'après le théorème de la dimension d'une somme, $\dim(E+F) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ et comme, en plus, $E+F$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$, $E+F = \mathbb{R}^4$. Par conséquent, E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

2.10 Espaces vectoriels supplémentaires | Niveau 2

Question 80

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X]\,;\ P(0) = P(1) = 0\} \ \text{ et } \ F = \{(P \in \mathbb{R}_3[X]\,;\ P'(0) = P''(0) = 0\},$$

où P' (resp. P'') est la dérivée première (resp. seconde) de P. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\dim E = 3$.
- ☐ [Faux] $\dim F = 1$.
- ☐ [Vrai] $E + F = \mathbb{R}_3[X]$.
- ☐ [Vrai] E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Explications: Une base de E est $\{P_1, P_2\}$, où $P_1 = X^3 - X$ et $P_2 = X^2 - X$, donc $\dim E = 2$. Une base de F est $\{Q_1, Q_2\}$, où $Q_1 = 1$ et $Q_2 = X^3$, donc $\dim F = 2$. On vérifie que $E \cap F = \{0\}$. Donc, d'après le théorème de la dimension d'une somme, $\dim(E+F) = 4$ et comme $E+F$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, $E+F = \mathbb{R}_3[X]$. Par conséquent, E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Question 81

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels :

$$E = \{P = a(X-1)^2 + b(X-1) + c\ ;\ a,b,c \in \mathbb{R}\} \ \text{ et } \ F = \{P = aX^3 + bX^2\ ;\ a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\dim E = 2$.
- ☐ [Vrai] $\dim E \cap F = 1$.
- ☐ [Faux] E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
- ☐ [Vrai] $E + F = \mathbb{R}_3[X]$.

Explications: Une base de E est $\{P_1, P_2, P_3\}$, où $P_1 = 1, P_2 = X - 1$, $P_3 = (X-1)^2$ donc $\dim E = 3$. Une base de F est $\{Q_1, Q_2\}$, où $Q_1 = X^2$ et $Q_2 = X^3$, donc $\dim F = 2$. En cherchant les relations de dépendance entre les polynômes P_1, P_2, P_3, Q_1 et Q_2, on trouve : $P_1 + 2P_2 + P_3 = Q_1$. Par conséquent, $E \cap F = \mathrm{Vect}\{Q_1\}$, donc E et F ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$. Du théorème de la dimension d'une somme, on déduit que $\dim(E+F) = 4$ et comme $E+F$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, $E+F = \mathbb{R}_3[X]$.

2.11 Espaces vectoriels supplémentaires | Niveau 3

Question 82

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,;\, P(-X) = P(X)\} \text{ et } F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,;\, P(-X) = -P(X)\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\dim E = 2$.
- ☐ [Faux] $\dim F = 3$.
- ☐ [Faux] $\dim E \cap F = 1$.
- ☐ [Vrai] E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Explications: Une base de E est $\{1, X^2\}$, donc $\dim E = 2$. Une base de F est $\{X, X^3\}$, donc $\dim F = 2$. On vérifie que $E \cap F = \{0\}$. Donc, d'après le théorème de la dimension d'une somme, $\dim(E+F) = 4$ et comme $E+F$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, $E+F = \mathbb{R}_3[X]$. Ainsi, E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Applications linéaires

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

---

3 Applications linéaires

3.1 Applications linéaires | Niveau 1

Question 83

On considère les deux applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sin x \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (y,x). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $f(0)=0$.
- ☐ [Faux] f est une application linéaire.
- ☐ [Faux] $g(x,y)=g(y,x)$, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
- ☐ [Vrai] g est une application linéaire.

Explications: f n'est pas linéaire car $f(\pi)=f(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=0$ et $f(\frac{\pi}{2})+f(\frac{\pi}{2})=2$. On vérifie que g est linéaire.

Question 84
On considère les deux applications suivantes :

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \to & (x,y^2)\end{array} \quad \text{et} \quad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \to & (x,-x).\end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $f(0,2)=(0,4)$.
- ☐ [Faux] f est une application linéaire.
- ☐ [Vrai] $g(0,0)=(0,0)$.
- ☐ [Vrai] g est une application linéaire.

Explications: L'application f n'est pas linéaire. Contre-exemple : $f(2(0,1))=f(0,2)=(0,4)$ et $2f(0,1)=(0,2)$. On vérifie que l'application g est linéaire.

Question 85
On considère les deux applications suivantes :

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \to & (x+y,x-z)\end{array} \quad \text{et} \quad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \to & (xy,xz).\end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $f(0,0,0)=(0,0)$.
- ☐ [Vrai] f est une application linéaire.
- ☐ [Faux] $g(1,1,0)=g(1,0,0)+g(0,1,0)$.
- ☐ [Faux] g est une application linéaire.

Explications: f est linéaire. g ne l'est pas, puisque $g((1,0,0)+(0,1,0))=g(1,1,0)=(1,0)$ et $g(1,0,0)+g(0,1,0)=(0,0)$.

3.2 Applications linéaires | Niveau 2

Question 86
On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant n$, $n\in\mathbb{N}$. On considère les deux applications suivantes :

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}\\ P & \to & P(0)+P'(0)\end{array} \quad \text{et} \quad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X]\\ P & \to & 1+P'+XP'',\end{array}$$

où P' (resp. P'') est la dérivée première (resp. seconde) de P. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $f(0) = 1$.
- ☐ [Vrai] f est une application linéaire.
- ☐ [Vrai] $g(0) = 1$.
- ☐ [Faux] g est une application linéaire.

Explications: On vérifie que f est linéaire. Par contre, g ne l'est pas, puisque $g(0) = 1 \neq 0$.

Question 87

On considère les applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & \mathrm{Re}(z) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & \mathrm{Im}(z), \end{array}$$

où $\mathrm{Re}(z)$ (resp. $\mathrm{Im}(z)$) est la partie réelle (resp. imaginaire) de z. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] f est $\mathbb{C}$-linéaire.
- ☐ [Vrai] f est $\mathbb{R}$-linéaire.
- ☐ [Vrai] g est $\mathbb{R}$-linéaire.
- ☐ [Faux] g est $\mathbb{C}$-linéaire.

Explications: On vérifie que f et g sont $\mathbb{R}$-linéaires. Par contre, elles ne sont pas $\mathbb{C}$-linéaires.

Question 88

On considère les applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & |z| \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & \overline{z}, \end{array}$$

où $|z|$ (resp. $\overline{z}$) est le module (resp. le conjugué) de z. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] f est $\mathbb{C}$-linéaire.
- ☐ [Faux] f est $\mathbb{R}$-linéaire.
- ☐ [Vrai] g est $\mathbb{R}$-linéaire.
- ☐ [Faux] g est $\mathbb{C}$-linéaire.

Explications: On vérifie que f n'est pas $\mathbb{R}$-linéaire (donc n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire) et que g est $\mathbb{R}$-linéaire, mais non $\mathbb{C}$-linéaire.

3.3 Applications linéaires | Niveau 3

Question 89
On considère les deux applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & |x+y| \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & \big(\max(x,y),\min(x,y)\big). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $f(1,-1)=0$.
- ☐ [Faux] f est une application linéaire.
- ☐ [Vrai] $g(0,0)=(0,0)$.
- ☐ [Faux] g est une application linéaire.

Explications: f n'est pas linéaire. Contre-exemple : $f((1,0)+(-1,0)) = f(0,0) = 0$ et $f(1,0)+f(-1,0)=|1|+|-1|=2$.
g n'est pas linéaire. Contre-exemple : $g((1,0)+(-1,0)) = g(0,0) = (0,0)$ et $g(1,0)+g(-1,0)=(1,0)+(0,-1)=(1,-1)$.

Question 90
On considère les applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \to & (x-y,y+2z+a) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \to & (ax+b)(x+y). \end{array}$$

où a et b sont des réels. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Pour tout $a\in\mathbb{R}$, f est une application linéaire.
- ☐ [Vrai] f est une application linéaire si et seulement si $a=0$.
- ☐ [Faux] g est une application linéaire si et seulement si $a=b=0$.
- ☐ [Vrai] g est une application linéaire si et seulement si $a=0$.

Explications: Si $a\neq 0$, alors $f(0,0,0)=(0,a)\neq(0,0)$, donc f n'est pas linéaire. On vérifie aussi que, si $a=0$, alors f est linéaire.
Si $a\neq 0$, $g(2(1,0,0))=4a+2b$ et $2g(1,0,0)=2a+2b\neq 4a+2b$, donc g n'est pas linéaire. On vérifie que si $a=0$ et b est quelconque, g est linéaire.

Question 91
On considère les applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \to & (z,x+ax^2) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \to & (z+a\sin x, y+be^x, c|x|+1). \end{array}$$

où a, b et c sont des réels. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Pour tout $a\in\mathbb{R}$, f est une application linéaire.
- ☐ [Vrai] f est une application linéaire si et seulement si $a=0$.

- ☐ [Faux] g est une application linéaire si et seulement si $a = b = c = 0$.
- ☐ [Vrai] Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, g n'est pas une application linéaire.

Explications: On vérifie que f est linéaire si et seulement si $a = 0$ et que g n'est pas linéaire pour tous réels a, b et c.

Question 92

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. On considère les deux applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \to & R \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \to & Q, \end{array}$$

où R (resp. Q) est le reste (resp. le quotient) de la division euclidienne de P par $X^3 + 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $f(0) = 0$.
- ☐ [Vrai] f est une application linéaire.
- ☐ [Vrai] $g(0) = 0$.
- ☐ [Faux] g n'est pas une application linéaire.

Explications: On vérifie que f et g sont linéaires.

3.4 Applications linéaires | Niveau 4

Question 93

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire si et seulement s'il existe un réel a tel que $f(x) = ax$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels a et b tels que $f(x, y) = (ax, by)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- ☐ [Vrai] Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels a, b, c et d tels que $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- ☐ [Faux] Une application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels a, b et c tels que $f(x, y, z) = (ax, by, cz)$, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Explications: Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels $a_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$, tels que :
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n, \ldots, a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n)$, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

3.5 Noyau et image | Niveau 1

Question 94

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\ker f$ peut-être vide.
- ☐ [Vrai] $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.
- ☐ [Faux] $0_E \in \operatorname{Im} f$.
- ☐ [Vrai] $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Explications: $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E, il contient au moins 0_E.
$\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F, il contient au moins 0_F, puisque $f(0_E) = 0_F$.

Question 95
Soit E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] f est injective si et seulement si $\ker f$ est vide.
- ☐ [Faux] f est injective si et seulement si $\ker f$ est une droite vectorielle.
- ☐ [Vrai] f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.
- ☐ [Faux] f est bijective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Explications: f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$.
f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.
f est bijective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} f = F$.

3.6 Noyau et image | Niveau 2

Question 96
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^5$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si $\ker f = \{(0,0,0)\}$, alors f est surjective.
- ☐ [Vrai] Si $\ker f$ est une droite vectorielle, alors $\operatorname{Im} f$ est un plan vectoriel.
- ☐ [Vrai] f est injective si seulement si $\dim \operatorname{Im} f = 3$.
- ☐ [Faux] f est bijective si et seulement si $\ker f = \{(0,0,0)\}$.

Explications: f est injective si et seulement si $\ker f = \{(0,0,0)\}$. f ne peut pas être surjective, puisque d'après le théorème du rang, la dimension de $\operatorname{Im} f$ est au plus 3.

Question 97
On considère l' application linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \to & (x-z, y+z, x+y). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\{(1,-1,1)\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ [Faux] f est injective.
- ☐ [Vrai] $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

- ☐ [Faux] f est surjective.

Explications: $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ (x-z, y+z, x+y) = (0,0,0)\} = \{(x,-x,x) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$. Donc $\{(1,-1,1)\}$ est une base de $\ker f$. Comme $\ker f \neq \{(0,0,0)\}$, f n'est pas injective.
D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f = 2$ et comme $f(e_1) = (1,0,1)$ et $f(e_2) = (0,1,1)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une base de $\operatorname{Im} f$. Comme $\dim \operatorname{Im} f = 2$, $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$, donc f n'est pas surjective.

Question 98
On considère l' application linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \rightarrow & (x-y, y-z, x+z). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\dim \ker f = 1$.
- ☐ [Vrai] f est injective.
- ☐ [Vrai] $\dim \operatorname{Im} f = 3$.
- ☐ [Faux] f n'est pas bijective.

Explications: $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ (x-y, y-z, x+z) = (0,0,0)\} = \{(0,0,0)\}$. Donc $\dim \ker f = 0$ et f est injective.
D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et comme $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$, donc f est surjective. Par conséquent, f est bijective.

Question 99
On considère l' application linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \rightarrow & (x+y+z, x+y-z). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\dim \ker f = 1$.
- ☐ [Faux] f est injective.
- ☐ [Faux] $\operatorname{rg}(f) = 1$.
- ☐ [Vrai] f n'est pas bijective.

Explications: $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ (x+y+z, x+y-z) = (0,0,0)\} = \{(x,-x,0) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$. Donc $\{(1,-1,0)\}$ est une base de $\ker f$. Comme $\ker f \neq \{(0,0,0)\}$, f n'est pas injective, donc f n'est pas bijective. Du théorème du rang, on déduit que $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = 2$.

Question 100
On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(e_1) = e_3$, $f(e_2) = e_1 + e_2$, $f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\{e_1+e_2-e_3\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
- ☐ [Vrai] $\dim \operatorname{Im} f = 2$.
- ☐ [Vrai] $\{e_1+e_2-e_3\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ [Faux] $\dim \ker f = 2$.

Explications: On remarque que $f(e_3) = f(e_1)+f(e_2)$ et que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ ne sont pas colinéaires, donc $\{e_1+e_2, e_3\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et donc $\dim \operatorname{Im} f = 2$.
D'après le théorème du rang, $\dim \ker f = 1$ et comme $f(e_1+e_2-e_3) = 0$ et $e_1+e_2-e_3 \neq 0$, $\{e_1+e_2-e_3\}$ est une base de $\ker f$.

3.7 Noyau et image | Niveau 3

Question 101
On considère l' application linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \rightarrow & P', \end{array}$$

où $\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$ et P' est la dérivée de P. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\{1\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ [Vrai] $\{1, X\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
- ☐ [Faux] $\{0, 1, X\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
- ☐ [Faux] f est surjective.

Explications: $\ker f = \{P \in \mathbb{R}_2[X]\ ;\ P' = 0\} = \mathbb{R}$. Donc $\{1\}$ est une base de $\ker f$. Comme $\ker f \neq \{0\}$, f n'est pas injective.
D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f = 2$ et comme $f(X) = 1$ et $f(X^2) = 2X$ ne sont pas colinéaires, $\{1, X\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$. Donc f n'est pas surjective, puisque $\dim \operatorname{Im} f = 2$ et $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$.

Question 102
On considère l'application linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \rightarrow & XP' - X^2P'', \end{array}$$

où $\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$ et P' (resp. P'') est la dérivée première (resp. seconde) de P. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\{1+X^2\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ [Vrai] $\{1, X^2\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ [Faux] $\{1+X\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
- ☐ [Vrai] $\operatorname{rg}(f) = 1$.

Explications: $\ker f = \{P \in \mathbb{R}_2[X]\ ;\ XP' - X^2P'' = 0\} = \{aX^2 + b\ ;\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Donc $\{1, X^2\}$ est une base de $\ker f$. Du théorème du rang, on déduit que $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im} f = 1$ et comme $f(X) = X \neq 0$, $\{X\}$ est une base de $\mathrm{Im} f$.

Question 103

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application linéaire :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \to & R, \end{array}$$

où R est le reste de la division euclidienne de P par $(X+1)^3$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\{X^3\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ [Vrai] $\dim \ker f = 1$.
- ☐ [Faux] $\{1 + X + X^2\}$ est une base de $\mathrm{Im} f$.
- ☐ [Faux] $\mathrm{rg}(f) = 3$.

Explications: $\ker f = \{P \in \mathbb{R}_3[X]\ ;\ R = 0\} = \{(X+1)^3 Q\ ;\ Q \in \mathbb{R}\}$. Donc $\{(1+X)^3\}$ est une base de $\ker f$. D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im} f = 3$ et l'on vérifie que $\{1, X, X^2\}$ est une base de $\mathrm{Im} f$.

Question 104

On considère $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, muni de sa base canonique $\mathscr{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$f(1) = X,\ f(X) = 1 + X,\ f(X^2) = (X-1)^2,\ f(X^3) = (X-1)^3.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\dim \ker f = 1$.
- ☐ [Vrai] f est injective.
- ☐ [Faux] f n'est pas injective.
- ☐ [Vrai] $\mathrm{rg}(f) = 4$.

Explications: Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On a :

$$P \in \ker f \iff a(X-1)^3 + b(X-1)^2 + (c+d)(X-1) + 2c + d = 0.$$

Comme $\{1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3\}$ est une famille libre, on déduit que $P = 0$. Donc $\dim \ker f = 0$ et f est injective.
D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im} f = 4$ et comme $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}_3[X]$ et donc f est surjective.

Question 105
Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies et f une application linéaire de E dans F. On pose $\dim E = n$ et $\dim F = m$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Si f est injective, alors $n \leqslant m$.
- ☐ [Faux] Si $n \leqslant m$, alors f est injective.
- ☐ [Vrai] Si f est surjective, alors $n \geqslant m$.
- ☐ [Faux] Si $n \geqslant m$, alors f est surjective.

Explications: On a : $\dim Imf \leqslant \dim F = m$.
Du théorème du rang, on déduit que si $n > m$, $\dim \ker f > 0$ et donc f n'est pas injective et que si $n < m$, $\dim \operatorname{Im} f < m$ et donc f n'est pas surjective.
Si $n \leqslant m$, alors f n'est pas nécessairement injective et si $n \geqslant m$, alors f n'est pas nécessairement surjective. Exemple : L'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Question 106
Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies tels que $\dim E = \dim F = n$ et f une application linéaire de E dans F. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si $\dim \ker f = 0$, alors $\dim \operatorname{Im} f < n$.
- ☐ [Vrai] si f est injective, alors f est surjective.
- ☐ [Vrai] Si $\dim \operatorname{Im} f < n$, alors $\dim \ker f > 0$.
- ☐ [Vrai] si f est surjective, alors f est injective.

Explications: Du théorème du rang, on déduit que f est bijective si, et seulement si, f est injective ou surjective.

Question 107
Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies et f une application linéaire de E dans F. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si f est injective, alors f est surjective.
- ☐ [Faux] Si f est surjective, alors f est injective.
- ☐ [Faux] Si $\dim E = \dim F$, alors f est bijective.
- ☐ [Vrai] Si f est bijective, alors $\dim E = \dim F$.

Explications: Si $\dim E \neq \dim F$, alors f peut-être injective (resp. surjective) sans qu'elle soit surjective (resp. injective).
Si $\dim E = \dim F$, f n'est pas nécessairement bijective.
Par contre, si f est bijective, comme E et F sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, du théorème du rang, on déduit que $\dim E = \dim F$.

Question 108
Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{F} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ une famille de vecteurs de E et $\mathscr{F}' = \{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_k)\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si $\mathscr{F}$ est une famille libre, alors $\mathscr{F}'$ est une famille libre.
- ☐ [Vrai] Si $\mathscr{F}$ est une famille libre et f est injective, alors $\mathscr{F}'$ est une famille libre.
- ☐ [Faux] Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathscr{F}'$ est une famille génératrice de F.
- ☐ [Vrai] Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E et f est surjective, alors $\mathscr{F}'$ est une famille génératrice de F.

Explications: Si $\mathscr{F}$ est libre, $\mathscr{F}'$ n'est pas nécessairement libre. Exemple : l'application nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{F}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Par contre, si de plus f est injective, alors $\mathscr{F}'$ est injective. En effet, soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des réels tels que $\lambda_1 f(u_1) + \dots \lambda_k f(u_k) = 0$, alors $\lambda_1 u_1 + \dots \lambda_k u_k \in \ker f$ et comme f est injective, $\lambda_1 u_1 + \dots \lambda_k u_k = 0$. Puisque $\mathscr{F}$ est libre, on déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.
Si $\mathscr{F}$ est génératrice de E, $\mathscr{F}'$ n'est pas nécessairement génératrice de F. Exemple : l'application nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{F}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Par contre, si de plus f est surjective, alors $\mathscr{F}'$ est génératrice de F. En effet, puisque f est surjective, $F = f(E)$ et comme $E = \text{Vect}\,(\mathscr{F})$, on déduit que $F = \text{Vect}\,(\mathscr{F}')$.

3.8 Noyau et image | Niveau 4

Question 109
On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que : $f^2 + f + Id = 0$, où Id est l'application identité de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\dim \ker f = 1$.
- ☐ [Vrai] f est injective.
- ☐ [Vrai] f est bijective et $f^{-1} = f^2$.
- ☐ [Vrai] f est bijective et $f^{-1} = -f - Id$.

Explications: Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0$. De l'égalité $f^2(x) + f(x) + x = 0$, on déduit que $x = 0$, donc $\dim \ker f = 0$ et donc f est injective.
De l'égalité $f^2 + f + Id = 0$, on déduit que $f o(-f - Id) = Id$, donc f est bijective et $f^{-1} = -f - Id = f^2$.

Question 110
Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E et f l'application de E dans E définie par :

$$\begin{array}{lccc} f: & E = F \oplus G & \to & E \\ & x = x_1 + x_2,\ (x_1 \in F, x_2 \in G) & \to & x_1. \end{array}$$

f est appelée la projection vectorielle de E sur F parallèlement à G. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] f est un endomorphisme de E.
- ☐ [Faux] $f^2 = 0$.
- ☐ [Vrai] $f^2 = f$.

☐ [Vrai] $F = \operatorname{Im} f$ et $G = \ker f$.

Explications: On vérifie que f est un endomorphisme, $f^2 = f$, $\ker f = G$ et $\operatorname{Im} f = F$.

Question 111

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E et f l'application de E dans E définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \to & E \\ x = x_1 + x_2,\ (x_1 \in F, x_2 \in G) & \to & x_1 - x_2. \end{array}$$

f est appelée la symétrie vectorielle de E par rapport à F parallèlement à G. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Vrai] f est un endomorphisme de E.

☐ [Faux] $f^2 = f$.

☐ [Vrai] $f^2 = Id$, où Id est l'identité de E.

☐ [Vrai] $F = \{x \in E\ ;\ f(x) = x\}$ et $G = \{x \in E\ ;\ f(x) = -x\}$.

Explications: On vérifie que f est un endomorphisme, $f^2 = Id$, $F = \{x \in E\ ;\ f(x) = x\}$ et $G = \{x \in E\ ;\ f(x) = -x\}$.

Question 112

Soit E un espace vectoriel et f un projecteur de E, c.à.d. un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$. On notera Id l'identité de E. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Faux] f est injective.

☐ [Vrai] $Id - f$ est un projecteur de E.

☐ [Vrai] $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

☐ [Vrai] $\operatorname{Im} f = \ker(Id - f)$.

Explications: f n'est pas nécessairement injective. Contre exemple : l'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Comme $f^2 = f$, $(Id - f)o(Id - f) = Id - 2f + f^2 = Id - f$, donc $Id - f$ est un projecteur.

Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap \ker f$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $f(y) = 0$, donc $f^2(x) = 0$. Or $f^2 = f$, on déduit que $y = 0$.

Soit $x \in E$, alors $x = f(x) + (x - f(x))$. Comme $f(x) \in \operatorname{Im} f$ et $x - f(x) \in \ker f$, on déduit que $E = \ker f + \operatorname{Im} f$. Par conséquent, $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Soit $y \in \operatorname{Im} f$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $(Id - f)(y) = f(x) - f^2(x) = 0$, puisque $f^2 = f$. Réciproquement, si $(Id - f)(y) = 0$, alors $y = f(y)$ et donc $y \in \operatorname{Im} f$. Par conséquent, $\operatorname{Im} f = \ker(Id - f)$.

Question 113

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme nilpotent de E, c.à.d. un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $n \geqslant 2$, vérifiant $f^n = 0$. On notera Id l'identité de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] f est injective.
- ☐ [Faux] f est surjective.
- ☐ [Vrai] $Id - f$ est injective.
- ☐ [Vrai] $Id - f$ est bijective.

Explications: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (x-y, x-y)$. Alors, $f^2 = 0$ et f n'est ni injective, ni surjective.
D'une manière générale, si f est nilpotent, f n'est pas bijectif. En effet, supposons qu'il existe une application g telle que $gof = Id$ et considérons un élément $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$ et k le plus petit entier $\geqslant 2$ tel que $f^k(x) = 0$. Alors, $g(f^k(x)) = 0 = gof(f^{k-1}(x)) = f^{k-1}(x)$, ce qui est absurde.
Soit $x \in E$ tel que $(Id - f)(x) = 0$, alors $f(x) = x$ et, par récurrence, $f^n(x) = x$. Or $f^n = 0$, donc $x = 0$. On en déduit que $Id - f$ est injective.
De l'égalité : $(Id - f)(Id + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}) = Id - f^n = Id$, on déduit que $Id - f$ est bijective et que $(Id - f)^{-1} = Id + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}$.

Question 114
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme involutif de E, c.à.d. un endomorphisme non nul de E tel que $f^2 = Id$, où Id est l'identité de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] f est bijective.
- ☐ [Faux] $\mathrm{Im}(Id + f) \cap \mathrm{Im}(Id - f) = E$.
- ☐ [Vrai] $E = \mathrm{Im}(Id + f) + \mathrm{Im}(Id - f)$.
- ☐ [Faux] $\mathrm{Im}(Id + f)$ et $\mathrm{Im}(Id - f)$ ne sont pas supplémentaires dans E.

Explications: De l'égalité $f^2 = Id$, on déduit que f est bijective et $f^{-1} = f$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(Id+f) \cap \mathrm{Im}(Id-f)$, alors il existe $x, x' \in E$ tels que $y = x + f(x) = x' - f(x')$.
De l'égalité $f^2 = Id$, on déduit que $f(y) = f(x) + x = f(x') - x' = y = -y$, donc $y = 0$.
Soit $x \in E$, alors $x = \frac{1}{2}(x + f(x)) + \frac{1}{2}(x - f(x)) \in \mathrm{Im}(Id+f) + \mathrm{Im}(Id-f)$. On en déduit que $E = \mathrm{Im}(Id+f) + \mathrm{Im}(Id-f)$. Par conséquent, $\mathrm{Im}(Id+f)$ et $\mathrm{Im}(Id-f)$ sont supplémentaires dans E.

Question 115
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si $f^2 = 0$, alors $f = 0$.
- ☐ [Faux] Si $f^2 = 0$, alors f est bijective.
- ☐ [Vrai] Si $f^2 = 0$, alors $\mathrm{Im} f \subset \ker f$.
- ☐ [Vrai] Si $\mathrm{Im} f \subset \ker f$, alors $f^2 = 0$.

Explications: Si $f^2 = 0$, f n'est pas forcément nulle. Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y) = (x-y, x-y)$.
Supposons que $f^2 = 0$ et que $f \neq 0$. Alors, il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et $f(x_0) \in \ker f$, puisque $f^2(x_0) = 0$. Donc f est non injective et donc non bijective.

Soit $y \in \operatorname{Im} f$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De l'égalité $f^2 = 0$, on déduit que $f(y) = 0$.
Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \operatorname{Im} f$. Comme $\operatorname{Im} f \subset \ker f$, $f^2(x) = 0$.

Question 116
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.
- ☐ [Vrai] Si $\ker f = \ker f^2$, alors $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.
- ☐ [Vrai] Si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, alors $\ker f = \ker f^2$.
- ☐ [Vrai] Si $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$, alors $\ker f = \ker f^2$.

Explications: Le noyau et l'image d'un endomorphisme ne sont pas nécessairement supplémentaires.
Soit $y \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$. Donc $f(y) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $f^2(x) = 0$. Or $\ker f^2 \subset kerf$, donc $f(x) = 0$ et donc $y = 0$. En utilisant le théorème du rang, on déduit que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.
D'après le théorème du rang, $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \ker f^2 + \dim \operatorname{Im} f^2 = \dim E$. Si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, on déduit que $\dim \ker f = \dim \ker f^2$. Or $\ker f$ est un sous-espace de $\ker f^2$, donc $\ker f = \ker f^2$.
On suppose que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$. Soit $x \in \ker f^2$, alors $f^2(x) = f(f(x)) = 0$. Donc $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \ker f$. Or $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$, donc $x \in \ker f$ et donc $\ker f^2 \subset \ker f$. On déduit que $\ker f^2 = \ker f$, puisque $\ker f \subset \ker f^2$ pour tout endomorphisme f.

Calcul matriciel

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

4 Calcul matriciel

4.1 Calcul matriciel | Niveau 1

Question 117
Soit A et B deux matrices. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Si la matrice $A+B$ est définie, alors $B+A$ est définie.
- ☐ [Faux] Si la matrice $A+B$ est définie, alors AB est définie.
- ☐ [Faux] Si la matrice AB est définie, alors BA est définie.
- ☐ [Vrai] Si la matrice $A+B$ est définie, alors A^tB est définie, où ${}^tB$ est la transposée de la matrice B.

Explications: La somme de deux matrices est définie si les deux matrices admettent la même taille. Dans ce cas, on a $A+B=B+A$. Le produit AB de deux matrices est défini si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Le produit n'est pas commutatif.

Question 118
On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } E=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $2A-B=C$.
- ☐ [Vrai] $AB=D$.
- ☐ [Faux] $BA=E$.
- ☐ [Faux] $AB=BA$.

Explications: On a : $2A-B=C$, $AB=D$ et $BA=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Question 119
On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $A+B=B$.
- ☐ [Vrai] $AB=\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Faux] $CA=\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] $CD=E$.

Explications: Les opérations $A+B$ et CA ne sont pas définies.

Question 120
On considère $M_{n,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition usuelle et la multiplication par un scalaire. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $M_{n,m}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
- ☐ [Vrai] $\dim M_{n,m}(\mathbb{R})=mn$.
- ☐ [Faux] $\dim M_{n,m}(\mathbb{R})=m+n$.

☐ [Faux] $M_{n,m}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

Explications: On vérifie que $M_{n,m}(\mathbb{R})$, muni des opérations usuelles est un $\mathbb{R}$- espace vectoriel. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$, on note $D_{i,j}$ la matrice dont le coefficient située à la ième ligne et jième colonne est 1 et les autres coefficients sont nuls. Alors, $\{D_{i,j}\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\}$ est une base de $M_{n,m}(\mathbb{R})$. Par conséquent, $\dim M_{n,m}(\mathbb{R}) = mn$.

4.2 Calcul matriciel | Niveau 2

Question 121

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Vrai] $2A + 3B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 13 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

☐ [Faux] $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ [Faux] $AB = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ [Vrai] $BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Explications: On a : $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Question 122

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On notera ${}^tM$ la transposée d'une matrice M. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Vrai] $A + {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ [Vrai] $B\,{}^tB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- ☐ [Faux] $A\,{}^tC = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] $C\,{}^tD = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Explications: On a : $A\,{}^tC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Question 123

Soit A, B et C des matrices d'ordre $n \geqslant 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \,\text{ou}\, B = 0$.
- ☐ [Faux] $A(BC) = (AC)B$.
- ☐ [Vrai] $A(B+C) = AC + AB$.
- ☐ [Faux] $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Explications: Le produit de deux matrices peut être nul sans que l'une des deux matrices soit nul. Contre-exemple : avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a : $A^2 = 0$. Le produit de deux matrices est associatif et distributif par rapport à l'addition. Comme le produit n'est pas commutatif, en général, $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Question 124

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice identité. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $A^2 = 2A$.
- ☐ [Faux] $A^n = 2^n A$, pour tout entier $n \geqslant 1$.
- ☐ [Vrai] $(A-I)^{2n} = I$, pour tout entier $n \geqslant 1$.
- ☐ [Faux] $(A-I)^{2n+1} = A+I$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Explications: On vérifie que pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = 2^{n-1}A$, $(A-I)^{2n} = I$ et $(A-I)^{2n+1} = A-I$.

Question 125

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Le rang de A est 3.
- ☐ [Vrai] Le rang de B est 1.
- ☐ [Vrai] Le rang de C est 3.
- ☐ [Faux] Le rang de D est 3.

Explications: Le rang d'une matrice est le nombre maximum de vecteurs colonnes ou lignes qui sont linéairement indépendants. Le rang de A est 1, le rang de B est 1, le rang de C est 3 et le rang de D est 2.

Question 126

Soit $E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] E n'est pas un espace vectoriel.
- ☐ [Faux] E est un esapce vectoriel de dimension 1.
- ☐ [Faux] E est un esapce vectoriel de dimension 4.
- ☐ [Vrai] E est un esapce vectoriel de dimension 2.

Explications: On vérifie que E est un espace vectoriel et que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E. Donc $\dim E = 2$.

Question 127

Soit $E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ b-c & b-a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] E n'est pas un espace vectoriel.
- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel de dimension 3.
- ☐ [Vrai] E est un espace vectoriel de dimension 2.
- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel de dimension 4.

Explications: On vérifie que E est un espace vectoriel, que

$$E = \left\{ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta - \alpha & -\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

et que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E. Donc $\dim E = 2$.

Question 128

Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et f l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ & M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \to & {}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \end{array}$$

où ${}^tM$ est la transposée de M. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] f est une application linéaire.
- ☐ [Faux] $\dim \ker f = 1$.

- ☐ [Vrai] $\dim \ker f = 0$.
- ☐ [Faux] $\dim \operatorname{Im} f = 3$.

Explications: On vérifie que f est une application linéaire, $\ker f = \{0\}$ et $\operatorname{Im} f = M_2(\mathbb{R})$. Donc $\dim \ker f = 0$ et $\dim \operatorname{Im} f = 4$.

4.3 Calcul matriciel | Niveau 3

Question 129
Soit A une matrice de rang r. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] A admet r vecteurs colonnes linéairement indépendants.
- ☐ [Vrai] A admet r vecteurs lignes linéairement indépendants.
- ☐ [Faux] Toute famille contenant r vecteurs colonnes de A est libre.
- ☐ [Faux] Toute famille contenant r vecteurs lignes de A est libre.

Explications: Le rang d'une matrice est le nombre maximum de vecteurs colonnes ou lignes qui sont linéairement indépendants.

Question 130
Soit $E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] E est stable par addition.
- ☐ [Vrai] E est stable par multiplication de matrices.
- ☐ [Faux] la multiplication de matrices de E n'est pas commutative.
- ☐ [Vrai] Soit $M \in \mathbb{R}_2(\mathbb{R})$. Si $MM' = M'M$, $\forall M' \in E$, alors $M \in E$.

Explications: On vérifie que E est stable par addition et par multiplication de matrices et que la multiplication de matrices de E est commutative.
Soit $M \in \mathbb{R}_2(\mathbb{R})$. On vérifie que si $MM' = M'M$, pour toute matrice M' de E, alors $M \in E$.

Question 131
Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et f l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & M_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \to & \operatorname{tr}(M) = a + d, \end{array}$$

le réel $\operatorname{tr}(M)$ est appelée la trace de M. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] f est une application linéaire.
- ☐ [Vrai] $\dim \ker f = 3$.
- ☐ [Faux] $\dim \operatorname{Im} f = 2$.
- ☐ [Vrai] $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

Explications: On vérifie que f est une application linéaire et que

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \; ; \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Donc la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\ker f$ et $\dim \ker f = 3$. Or, d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f = 1 = \dim \mathbb{R}$ et comme $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

Question 132

Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et f l'application définie par :

$$\begin{array}{cccc} f: & M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ & M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \to & M - {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}, \end{array}$$

${}^tM$ est la transposée de M. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] f est une application linéaire.
- ☐ [Vrai] $\dim \ker f = 3$.
- ☐ [Faux] $\dim \operatorname{Im} f = 2$.
- ☐ [Faux] $\dim \operatorname{Im} f = 3$.

Explications: On vérifie que f est une application linéaire, $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \; ; \; a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$ et $\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. On déduit que $\dim \ker f = 3$ et $\dim \operatorname{Im} f = 1$.

4.4 Calcul matriciel | Niveau 4

Question 133

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $N = A - aI$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $N^k = 0$, pour tout entier $k \geqslant 3$.
- ☐ [Faux] On ne peut pas appliquer la formule du binôme pour le calcul de A^n.
- ☐ [Vrai] Pour tout entier $n \geqslant 2$, $A^n = a^n I + n a^{n-1} N + \dfrac{n(n-1)}{2} a^{n-2} N^2$.
- ☐ [Vrai] Pour tout entier $n \geqslant 2$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} & n a^{n-1} b + n(n-1) a^{n-2} \\ 0 & a^n & 2n a^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$.

Explications: On a : $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^k=0$, pour tout $k \geqslant 3$.
On a : $A=N+aI$. Comme le produit des matrices N et aI est commutatif, on peut appliquer la formule du binôme pour le calcul des puissances de A.

Question 134

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N=A-I$, où $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère 3 suites récurrentes $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définies par u_0, v_0, w_0 des réels donnés et pour $n \geqslant 1$:

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcl} u_n &=& u_{n-1}+2v_{n-1}+3w_{n-1} \\ v_n &=& v_{n-1}+2w_{n-1} \\ w_n &=& w_{n-1}. \end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $N^k=0$, pour tout entier $k \geqslant 2$.
- ☐ [Vrai] Pour tout entier $n \geqslant 2$, $A^n=I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2$.
- ☐ [Faux] Pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcl} u_n &=& u_0+2nv_0+3nw_0 \\ v_n &=& v_0+2nw_0 \\ w_n &=& w_0. \end{array}\right.$$

- ☐ [Vrai] Pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcl} u_n &=& u_0+2nv_0+n(2n+1)w_0 \\ v_n &=& v_0+2nw_0 \\ w_n &=& w_0. \end{array}\right.$$

Explications: On a : $N=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^k=0$, pour tout $k \geqslant 3$.
Comme $A=N+I$ et le produit des matrices N et I est commutatif, on peut appliquer la formule du binôme pour le calcul des puissances de A.
En calculant A^n et utilisant l'égalité : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$, on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_n &=& u_0+2nv_0+n(2n+1)w_0 \\ v_n &=& v_0+2nw_0 \\ w_n &=& w_0. \end{array}\right.$$

Question 135
On note $M_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit

$$E = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid^t M = M\} \quad \text{et} \quad F = \{M \in M_2(\mathbb{R})\,;\, {}^tM = -M\},$$

où ${}^tM$ désigne la transposée de M. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] E est un espace vectoriel de dimension 3.
- ☐ [Faux] E est un espace vectoriel de dimension 2.
- ☐ [Vrai] F est un espace vectoriel de dimension 1.
- ☐ [Vrai] E et F sont supplémentaires dans $M_2(\mathbb{R})$.

Explications: Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que ${}^tM = M$, alors $b = c$. Donc la famille

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

forme une base de E. D'où $\dim E = 3$.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que ${}^tM = -M$, alors $a = d = 0$ et $c = -b$. Donc $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de F et donc $\dim F = 1$.
On vérifie que $E \cap F = \{0_E\}$ et en utilisant le théorème de la dimension d'une somme, on déduit que E et F sont supplémentaires dans $M_2(\mathbb{R})$.

Question 136
Dans $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, on considère la famille $\mathscr{B}' = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, où

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\mathscr{B}'$ est une famille libre de $M_2(\mathbb{R})$.
- ☐ [Faux] $\mathscr{B}'$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$.
- ☐ [Faux] $\mathrm{Vect}\mathscr{B}' = M_2(\mathbb{R})$.
- ☐ [Vrai] $\dim \mathrm{Vect}\mathscr{B}' = 3$.

Explications: On vérifie que $B_1 + B_3 = B_2 + B_4$ et que $\{B_1, B_2, B_3\}$ est une famille libre. Donc $\dim \mathrm{Vect}\mathscr{B}' = 3$.

Question 137
On considère $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels,
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l' application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ & M & \to & AM - MA. \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\dim\ker f = 2$.
- ☐ [Faux] f est injective.
- ☐ [Vrai] $\mathrm{rg}(f) = 2$.
- ☐ [Faux] f est surjective.

Explications: On vérifie que pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $f(M) = \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix}$. Par conséquent, $\ker f = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R}\right\}$ et $\mathrm{Im} f = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$. On déduit que $\dim\ker f = 2$, $\mathrm{rg}(f) = \dim\mathrm{Im} f = 2$ et que f n'est ni injective, ni surjective.

4.5 Inverse d'une matrice | Niveau 1

Question 138
Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels et I la matrice identité. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B telle que $AB = I$.
- ☐ [Vrai] A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B telle que $BA = I$.
- ☐ [Faux] A est inversible si et seulement si les coefficients de A sont inversibles pour la multiplication dans $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] A est inversible si et seulement si pour toute matrice Y à une colonne et n lignes, il existe une matrice X à une colonne et n lignes telle que $AX = Y$.

Explications: Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.
(ii) Il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$.
(iii) Il existe une matrice B telle que $AB = I$.
(iv) Il existe une matrice B telle que $BA = I$.
(v) Pour toute matrice Y à une colonne et n lignes, il existe une matrice X à une colonne et n lignes telle que $AX = Y$.

4.6 Inverse d'une matrice | Niveau 2

Question 139
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] A est inversible.
- ☐ [Vrai] B est inversible.

- ☐ [Faux] B est inversible et $B^{-1} = C$.
- ☐ [Faux] C est inversible.

Explications: On vérifie que A et B sont inversibles, que $B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq C$ et que C n'est pas inversible.

Question 140
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] A est inversible.
- ☐ [Faux] B est inversible.
- ☐ [Vrai] C est inversible.
- ☐ [Faux] D est inversible.

Explications: A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. B n'est pas inversible, puisque les deux vecteurs colonnes sont proportionnels. C est inversible et

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

D n'est pas inversible, puisque les trois vecteurs colonnes sont linéairement dépendants.

Question 141
Soit A une matrice inversible. On notera ${}^tA$ la transposée de A. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $3A$ est inversible.
- ☐ [Vrai] ${}^tA$ est inversible.
- ☐ [Vrai] A^tA est inversible.
- ☐ [Faux] $A +^t A$ est inversible.

Explications: Comme A est inversible, il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$, où I est la matrice identité. On en déduit : $3A$ est inversible et son inverse est $\frac{1}{3}B$.
${}^tA$ est inversible et son inverse est ${}^tB$. En effet, $I = {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
A^tA est inversible et son inverse est ${}^tBB$. En effet, $({}^tBB)A^tA = {}^tB(BA)^tA = {}^tB^tA = {}^t(AB) = I$.
$A +^t A$ n'est pas nécessairement inversible. Contre exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 142
Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et I la matrice identité. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ vérifiant $A^m = I$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] A est inversible et $A^{-1} = A^{m-1}$.
- ☐ [Vrai] Le rang de A est n.
- ☐ [Faux] A n'est pas inversible.
- ☐ [Vrai] Si $m = 2$, A est inversible et $A^{-1} = A$.

Explications: On a : $A \times A^{m-1} = I$, donc A est inversible et $A^{-1} = A^{m-1}$. Comme A est inversible, le rang de A est n. Si $m = 2$, alors $A^{-1} = A$.

4.7 Inverse d'une matrice | Niveau 3

Question 143
On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] A est inversible.
- ☐ [Faux] A^2 est inversible.
- ☐ [Faux] $A^3 + A^2$ est inversible.
- ☐ [Vrai] $A + {}^tA$ est inversible, où ${}^tA$ est la transposée de A.

Explications: A n'est pas inversible, puisque les trois vesteurs colonnes sont linéairement dépendants.
Si A^2 est inversible, alors il existe une matrice B telle que $A^2B = I$, donc $A(AB) = I$ et donc A est inversible, ce qui est absurde.
Si $A^3 + A^2$ est inversible, alors il existe une matrice B telle que $(A^3 + A^2)B = I$. On en déduit que $A[(A^2 + A)B] = I$ et donc A est inversible, ce qui est absurde.
$A + {}^tA$ est inversible, puisque les vecteurs colonnes de cette matrice sont linéairement indépendants.

Question 144
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée. On rappelle les définitions suivantes :

. A est dite diagonale si tous les coefficients $a_{i,j}$, avec $i \neq j$ sont nuls.

. A est dite symétrique si pour tous i, j, $a_{i,j} = a_{j,i}$.

. A est dite triangulaire inférieurement (resp. supérieurement) si pour tous $i < j$, $a_{i,j} = 0$ (resp. pour tous $i > j$, $a_{i,j} = 0$).

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si A est diagonale, A est inversible si et seulement s'il existe un coefficient $a_{i,i}$ non nul.
- ☐ [Vrai] Si A est diagonale, A est inversible si et seulement si tous les coefficients $a_{i,i}$ sont non nuls.

- ☐ [Vrai] A est symétrique si ${}^tA = A$, où ${}^tA$ est la transposée de A.
- ☐ [Faux] Si A est triangulaire inférieurement, A est inversible.

Explications: A est inversible si et seulement si les vecteurs colonnes sont linéairement indépendants. On en déduit que si A est diagonale, A est inversible si et seulement si tous les coefficients $a_{i,i}$ sont non nuls et que si A est triangulaire (inférieurement ou supérieurement), A est inversible si et seulement si tous les coefficients $a_{i,i}$ sont non nuls. Par définition, A est symétrique si ${}^tA = A$.

Question 145

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre $n \geqslant 1$. On notera ${}^tA$ la transposée de A et $\text{rg}(A)$ le rang de A. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$.
- ☐ [Vrai] Si A est inversible, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^{-1})$.
- ☐ [Faux] $\text{rg}(A+B) = \max\big(\text{rg}(A), \text{rg}(B)\big)$.
- ☐ [Faux] $\text{rg}(AB) = \text{rg}(BA)$.

Explications: Le rang d'une matrice est le nombre maximum de vecteurs colonnes ou lignes qui sont linéairement indépendants. On en déduit que $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$ et que, si A est inversible, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^{-1}) = n$.
En général, $\text{rg}(A+B) \neq \max\big(\text{rg}(A), \text{rg}(B)\big)$ et $\text{rg}(AB) \neq \text{rg}(BA)$. Contre-exemple : avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

on vérifie que : $A + B = 0$, $AC = 0$ et $CA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 1$ mais $\text{rg}(A+B) = 0$ et $\text{rg}(AC) = 0$ est différent de $\text{rg}(CA) = 1$.

Question 146

On considère $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et A et B deux matrices non nulles telles que $AB = 0$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $A = 0$ ou $B = 0$.
- ☐ [Faux] A est inversible.
- ☐ [Faux] B est inversible.
- ☐ [Vrai] A n'est pas inversible.

Explications: Si A est inversible, alors il existe une matrice C telle que $CA = I$, où I est la matrice identité. Donc $(CA)B = B$. Or $(CA)B = C(AB)$ et $AB = 0$, donc $B = 0$, ce qui est absurde.

Question 147

On considère $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et A, B

et C trois matrices non nulles deux à deux distinctes telles que $AB = AC$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $B = C$.
- ☐ [Faux] $A = 0$.
- ☐ [Vrai] A n'est pas inversible.
- ☐ [Faux] Le rang de A est n.

Explications: On a : $A(B-C) = 0$, $A \neq 0$ et $B-C \neq 0$ (le produit de deux matrices peut être nul sans que les deux matrices soient nulles).
Si A est inversible, alors il existe une matrice D telle que $DA = I$, où I est la matrice identité. Donc $(DA)(B-C) = B-C$. Or $(DA)(B-C) = D(A(B-C))$ et $A(B-C) = 0$, donc $B-C = 0$, ce qui est absurde. On déduit que A n'est pas inversible et donc le rang de A est $< n$.

4.8 Inverse d'une matrice | Niveau 4

Question 148

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Le rang de A est 1.
- ☐ [Vrai] A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A + A^{-1})^n = (2^n \cos^n x)I$, où I est la matrice identité.
- ☐ [Vrai] Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = \begin{pmatrix} \cos(nx) & -\sin(nx) \\ \sin(nx) & \cos(nx) \end{pmatrix}$.

Explications: On vérifie que A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$. le rang de A est donc 2.
De l'égalité $A + A^{-1} = (2\cos x)I$, on déduit que $(A + A^{-1})^n = (2^n \cos^n x)I$, pour tout entier n.
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on démontre que

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(nx) & -\sin(nx) \\ \sin(nx) & \cos(nx) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A^{-1})^n = \begin{pmatrix} \cos(nx) & \sin(nx) \\ -\sin(nx) & \cos(nx) \end{pmatrix}.$$

On déduit que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = \begin{pmatrix} \cos(nx) & -\sin(nx) \\ \sin(nx) & \cos(nx) \end{pmatrix}$.

Question 149

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et I la matrice identité. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ vérifiant : $A^m + A^{m-1} + \cdots + A + I = 0$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] A est inversible et $A^{-1} = A^m$.
- ☐ [Vrai] A est inversible et $A^{-1} = -(A^{m-1} + \cdots + A + I)$.
- ☐ [Vrai] Le rang de A est n.
- ☐ [Faux] A n'est pas inversible.

Explications: De l'égalité : $A \times (A^{m-1} + A^{m-2} + \cdots + I) = -I$, on déduit que A est inversible et que $A^{-1} = -(A^{m-1} + \cdots + A + I) = A^m$. Puisque A est inversible, le rang de A est n.

Question 150

Soit A une matrice nilpotente, c.à.d il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $A^n = 0$. On notera I la matrice identité. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] A est inversible.
- ☐ [Faux] A est inversible et $A^{-1} = A^{n-1}$.
- ☐ [Vrai] Il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que $A - aI$ n'est pas inversible.
- ☐ [Vrai] Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $A - aI$ est inversible.

Explications: On suppose que A est inversible, alors A est non nul et il existe une matrice C telle que $AC = I$. Soit m le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $A^m = 0$. Alors, $0 = A^m C = A^{m-1}(AC) = A^{m-1}$, ce qui est absurde. Par conséquent, A n'est pas inversible.
Comme A n'est pas inversible, pour $a = 0$, $A - aI$ n'est pas inversible.
Soit $a \in \mathbb{R}^*$, de l'égalité : $(A - aI)(a^{n-1}I + a^{n-2}A + \cdots + aA^{n-2} + A^{n-1}) = A^n - a^n I = -a^n I$, on déduit que $A - aId$ est inversible et que $(A - aId)^{-1} = -\dfrac{1}{a^n}\left(a^{n-1}I + a^{n-2}A + \cdots + aA^{n-2} + A^{n-1}\right)$.

Applications linéaires et matrices

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

---

5 Applications linéaires et matrices

5.1 Matrice d'une application linéaire | Niveau 1

Question 151

On considère $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ munis de leurs bases canoniques et f l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & y - x. \end{array}$$

La matrice de f relativement aux bases canoniques est :

- ☐ [Vrai] $\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Faux] $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Faux] $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ [Faux] $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Explications: Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ et $\mathscr{B}' = \{1\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ respectivement. La matrice de f relativement à ces bases est la matrice dont la 1ère colonne est $f(e_1) = -1$ et la 2ème colonne est $f(e_2) = 1$. Cette matrice est : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 152

On considère $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ munis de leurs bases canoniques et f l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \to & (x, -x). \end{array}$$

La matrice de f relativement aux bases canoniques est :

☐ [Faux] $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ [Vrai] $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

☐ [Faux] $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ [Faux] $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Explications: Soit $\mathscr{B} = \{1\}$ et $\mathscr{B}' = \{e_1, e_2\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement. Comme $f(1) = (1, -1)$, la matrice de f relativement à ces bases est la matrice : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Question 153

On considère $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ munis de leurs bases canoniques et f l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \to & (y, x, -y). \end{array}$$

La matrice de f relativement aux bases canoniques est :

☐ [Faux] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ [Faux] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ [Vrai] $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ [Faux] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Explications: Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ et $\mathscr{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. La matrice de f relativement à ces bases est la matrice dont la 1ère colonne $f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la 2ème colonne est $f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Question 154

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique et f l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \to & (2x+y, 4x-3y). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] La matrice de f dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] La matrice de f dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] f est injective.
- ☐ [Vrai] f est bijective.

Explications: Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice dont la $j$ième colonne est constituée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}$.
Cette matrice est : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.
On vérifie que $\ker f = \{(0,0)\}$, donc f est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^2$, et donc f est bijectif.

Question 155

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique et f l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \to & (x+y, x-z, y+z). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] La matrice de f dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Faux] La matrice de f dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] Le rang de f est 2.
- ☐ [Faux] Le rang de f est 3.

Explications: Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice dont la $j$ième colonne est constituée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}$. Cette matrice est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On vérifie que $f(e_3) = f(e_2) - f(e_1)$ et que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ ne sont pas colinéaires, donc $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et donc $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = 2$.

Question 156
Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ et la base $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2\}$, où $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (2, 3)$. On notera P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.
Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] $Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Explications: Une matrice de passage est inversible, puisque l'application linéaire associée est bijective. L'inverse de la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 157
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et la base $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$, où $u_1 = (1, 1, -1), u_2 = (0, 2, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$. On notera P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.
Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Vrai] $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ [Faux] $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ [Vrai] $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

☐ [Faux] P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Explications: Une matrice de passage est inversible, puisque l'application linéaire associée est bijective. L'inverse de la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 158

Soit A une matrice inversible d'ordre $n \geqslant 1$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Vrai] f est bijective.

☐ [Faux] Le noyau de f est une droite vectorielle.

☐ [Vrai] Le rang de f est n.

☐ [Vrai] Le rang de A est n.

Explications: Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.

(ii) Le rang de A est n.

(iii) f est bijective.

(iv) Le rang de f est n.

(v) Le noyau de f est nul.

5.2 Matrice d'une application linéaire | Niveau 2

Question 159

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$, on considère la base canonique $\mathscr{B} = \{1, X, X^2\}$ et la base $\mathscr{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$, où $P_1 = X, P_2 = 1-X$ et $P_3 = (1-X)^2$. On notera P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Faux] $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] La matrice de l'application identité de $\mathbb{R}_2[X]$ de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Explications: Par définition, P est la matrice de l'application identité de $\mathbb{R}_2[X]$ de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 160

Soit $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (0,1,1)$, $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,-1)$ et f l'application linéaire définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \to & (x+y, x-z). \end{array}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ [Vrai] $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- ☐ [Faux] La matrice de f par rapport aux bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$ est : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] La matrice de f par rapport aux bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$ est :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Explications: On vérifie que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de f par rapport à ces bases est la matrice dont la $j$ième colonne est constituée des coordonnées de $f(u_j)$ dans la base $\{v_1, v_2\}$. Cette matrice est : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 161

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathscr{B}$ et f l'application linéaire définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \to & (y+z, x+z, x+y). \end{array}$$

Soit $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$, où $u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ [Faux] La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] La matrice de f de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Faux] La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Explications: La matrice de f d'une base $\mathscr{B} = (u_j)$ dans une autre base $\mathscr{B}' = (v_i)$ est la matrice dont la $j$ième colonne est constituée des coordonnées de $f(u_j)$ dans la base $\mathscr{B}'$. On déduit que :

La matrice de f dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de f de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 162

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathscr{B}$ et f l'application linéaire définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \to & (x+z, 2x+2z, -x-z). \end{array}$$

Soit $u_1 = (0,1,0), u_2 = (1,2,-1)$ et $u_3 = (1,0,0)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ [Vrai] $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ [Faux] $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- ☐ [Vrai] La matrice de f dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Explications: $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\ker f$ et $\{u_2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$. Comme $\ker f \cap \operatorname{Im} f$ est non nul, $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Comme $f(u_1) = f(u_2) = 0$ et $f(u_3) = u_2$, la matrice dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 163

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$, muni de sa base canonique $\mathscr{B} = \{1, X, X^2\}$ et f l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \rightarrow & XP', \end{array}$$

où P' est la dérivée de P. Soit $\mathscr{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$, où $P_1 = 1 + X, P_2 = 1 - X, P_3 = (1 + X)^2$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ☐ [Vrai] La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] La matrice de f de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Faux] La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Explications: La matrice de f d'une base $\mathscr{B} = (u_j)$ dans une base $\mathscr{B}' = (v_i)$ est la matrice dont la $j$ième colonne est constituée des coordonnées de $f(u_j)$ dans la base $\mathscr{B}'$. La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Question 164

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2\}$, où $u_1 = (3,1), u_2 = (1,-1)$, une base de $\mathbb{R}^2$. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et B La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Faux] $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Faux] $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] $A^n = 2^{n-2}\begin{pmatrix} 3+(-1)^n & 3-3(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1+3(-1)^n \end{pmatrix}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Explications: Soit E un espace vectoriel de dimension finie, muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ et P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Soit f un endomorphisme de E de matrice A (resp. B) dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$). Alors, on a la relation : $AP = PB$. De cette relation, on déduit que $A^n = PB^nP^{-1}$. $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et que

$$A^n = 2^{n-2}\begin{pmatrix} 3+(-1)^n & 3-3(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1+3(-1)^n \end{pmatrix}, \text{ pour tout entier } n \geqslant 1.$$

5.3 Matrice d'une application linéaire | Niveau 3

Question 165

On considère $\mathbb{R}_3[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, muni de sa base canonique notée $\mathscr{B}$ et f l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \to & R, \end{array}$$

où R est le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$. Soit $\mathscr{B}' = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, où $P_1 = 1$, $P_2 = 1-X$, $P_3 = (1-X)^2$ et $P_4 = X(1-X)^2$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
- ☐ [Faux] La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ [Vrai] $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Explications: La matrice de f d'une base $\mathscr{B} = (u_j)$ dans une autre base $\mathscr{B}' = (v_i)$ est la matrice dont la $j$ième colonne est constituée des coordonnées de $f(u_j)$ dans la base $\mathscr{B}'$.

La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de f de la base $\mathscr{B}'$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De cette matrice, on déduit que $\{P_1, P_2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et $\{P_3, P_4\}$ est une base de $\ker f$. Comme $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Question 166

On considère $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$ et $\mathbb{R}^3$ munis de leurs bases canoniques notées respectivement $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}$. Soit f l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & P & \to & \big(P(0), P(1), P(-1)\big). \end{array}$$

On considère la base $\mathscr{B}_2 = \{P_1, P_2, P_3\}$, où $P_1 = 1, P_2 = 1 + X, P_3 = 1 + X^2$. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Faux] La matrice de f de la base $\mathscr{B}_1$ à la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ [Vrai] La matrice de f de la base $\mathscr{B}_1$ à la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ [Vrai] La matrice de f de la base $\mathscr{B}_2$ à la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

☐ [Faux] La matrice de f de la base $\mathscr{B}_2$ à la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Explications: La matrice de f d'une base $\mathscr{B} = (u_j)$ dans une base $\mathscr{B}' = (v_i)$ est la matrice dont la $j$ième colonne est constituée des coordonnées de $f(u_j)$ dans la base $\mathscr{B}'$. La matrice de f de la base $\mathscr{B}_1$ à la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice de f de la base $\mathscr{B}_2$ à la base $\mathscr{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 167

Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles engendré par les fonctions $f_1,\ f_2$ et f_3 définies par : $f_1(x)=1,\ f_2(x)=\cos x$ et $f_3(x)=\sin x$. On munira $\mathscr{F}$ des bases $\mathscr{B}=\{f_1,f_2,f_3\}$ et $\mathscr{B}'=\{f_1,f_2+f_3,f_2-f_3\}$. On notera P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.
- ☐ [Faux] $P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] $Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.
- ☐ [Faux] La matrice de l'application identité de $\mathscr{F}$ de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

Explications: Par définition, P est la matrice de l'application identité de $\mathscr{F}$ de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$ et Q est la matrice de l'application identité de $\mathscr{F}$ de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Donc

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\quad\text{donc}\quad Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

Question 168

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ est :

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\dim\ker(f-Id)=2$ et $\dim\ker(f-2Id)=1$.
- ☐ [Faux] $\dim\ker(f-Id)=1$ et $\dim\ker(f-2Id)=2$.

- ☐ [Vrai] Il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] Il existe une matrice C inversible telle que : $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Explications: On vérifie que $\dim\ker(f - Id) = 2$ et $\dim\ker(f - 2Id) = 1$. Soit $\{u_1, u_2\}$ une base de $\ker(f - Id)$ et $\{u_3\}$ une base de $\ker(f - 2Id)$.
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$. En considérant l'image par f, on obtient $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + 2\lambda_3 u_3 = 0$. On déduit que $\lambda_3 = 0$ et comme $\{u_1, u_2\}$ est libre, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Par conséquent, $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, la matrice de f est : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On prend C la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, c.à.d la matrice de l'identité de $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Question 169

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Soit $a \in \mathbb{R}$. $A - aI$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $a \neq 4$.
- ☐ [Faux] $\text{rg}(A) = 3$ et $\text{rg}(A - 4I) = 2$.
- ☐ [Faux] $\dim\ker f = 2$ et $\dim\ker(f - 4Id) = 1$.
- ☐ [Vrai] Il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Explications: On vérifie que $A - aI$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $a \neq 4$, que $\text{rg}(A) = 2$ et $\text{rg}(A - 4I) = 1$. Une base de $\ker f$ est $\{u_1\}$, où $u_1 = (1, 1, -2)$, et donc $\dim\ker f = 1$. Une base de $\ker(f - 4I)$ est $\{u_2, u_3\}$, où $u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$ donc $\dim\ker(f - 4I) = 2$.
La matrice de f dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ est : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Question 170

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\dim\ker(f+Id) = \dim\ker(f-2Id) = \dim\ker(f-3Id) = 1$.
- ☐ [Faux] $\dim\ker(f+Id) = \dim\ker(f-2Id) = 1$ et $\dim\ker(f-3Id) = 2$.
- ☐ [Vrai] Il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est : $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] L'application $(f+Id)o(f-2Id)o(f-3Id)$ est nulle.

Explications: On vérifie que $\{u_1 = (1,0,0)\}$ est une base de $\ker(f+Id)$, $\{u_2 = (2,3,3)\}$ est une base de $\ker(f-2Id)$ et que $\{u_3 = (3,4,8)\}$ est une base de $\ker(f-3Id)$. Donc $\dim\ker(f+Id) = \dim\ker(f-2Id) = \dim\ker(f-3Id) = 1$.
On vérifie que $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans cette base est : $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Soit $g = (f+Id)o(f-2Id)o(f-3Id)$. On pose $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. On vérifie que pour $i = 1,2,3$, $g(u_i) = (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2)(\lambda_i - \lambda_3)u_i = 0$. Par conséquent, g est l'application nulle, puisque $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Question 171

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Soit $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (0,1,1)$ et $\mathscr{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$. On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\dim\ker(f^2 - Id) = 1$.
- ☐ [Faux] $\{v_2\}$ est une base de $\ker(f^2 + Id)$.
- ☐ [Vrai] $\mathbb{R}^3 = \ker(f^2 - Id) \oplus \ker(f^2 + Id)$.
- ☐ [Vrai] $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de f^2 dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Explications: On vérifie que $\{v_1\}$ est une base de $\ker(f^2 - Id)$, que $\{v_2, v_3\}$ est une base de $\ker(f^2 + Id)$ et que $\mathscr{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que :

$$\mathbb{R}^3 = \ker(f^2 - Id) \oplus \ker(f^2 + Id).$$

La matrice de f^2 dans la base $\mathscr{B}'$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Question 172
Soit A une matrice à coefficients réels, à 3 lignes et 4 colonnes. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] A est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ dans des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
- ☐ [Vrai] A est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dans des bases de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
- ☐ [Faux] A est la matrice d'une application linéaire de noyau nul.
- ☐ [Faux] A est la matrice d'une application linéaire bijective.

Explications: A est la matrice d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dans des bases de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$. D'après le théorème du rang, le noyau d'une telle application est non nul.
Comme A n'est pas une matrice carrée, A n'est pas inversible et donc si f est une application linéaire de matrice A, f n'est pas bijective.

Question 173
Soit A une matrice à coefficients réels, à 4 lignes et 3 colonnes. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] A est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ dans des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
- ☐ [Faux] A est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dans des bases de de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
- ☐ [Faux] A est la matrice d'une application linéaire de rang 4.
- ☐ [Faux] A est la matrice d'une application linéaire bijective.

Explications: A est la matrice d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dans des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$. D'après le théorème du rang, le rang d'une telle application est au plus 3.
Comme A n'est pas une matrice carrée, A n'est pas inversible et donc si f est une application linéaire de matrice A, f n'est pas bijective.

5.4 Matrice d'une application linéaire | Niveau 4

Question 174
On considère $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles engendré par les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par : $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = e^x$ et $f_3(x) = xe^x$. Soit ϕ l'application linéaire définie :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathscr{F} & \to & \mathscr{F} \\ & f & \to & f + f' - f'', \end{array}$$

où f' (resp. f'') est la dérivée première (resp. seconde) de f. On notera M la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- ☐ [Faux] Le rang de la matrice M est 2.
- ☐ [Vrai] ϕ est bijective.
- ☐ [Vrai] M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Explications: La matrice de ϕ d'une base $\mathscr{B} = (u_j)$ dans une base $\mathscr{B}' = (v_i)$ est la matrice dont la $j$ième colonne est constituée des coordonnées de $\phi(u_j)$ dans la base $\mathscr{B}'$. Donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le rang d'une matrice est le nombre maximum de vecteurs colonnes ou lignes linéairement indépendants. Donc le rang de M est 3. Par conséquent, ϕ est bijective et M est inversible. On vérifie que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 175

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f^2 = 0$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\operatorname{Im} f \subset \ker f$.
- ☐ [Faux] $\operatorname{Im} f = \ker f$.
- ☐ [Faux] Le rang de f est 2.
- ☐ [Vrai] Il existe une base de E dans laquelle le matrice de f est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où a est un réel non nul.

Explications: Comme $f^2 = 0$, $\operatorname{Im} f \subset \ker f$. D'après le théorème du rang, on déduit que $\dim \ker f = 2$ et $\operatorname{rg}(f) = 1$.
Soit $\{u\}$ une base de $\operatorname{Im} f$. On complète cette base pour obtenir une base $\{u, v\}$ de $\ker f$, puis, on complète cette dernière base pour obtenir une base $\{u, v, w\}$ de E. Alors, la matrice de f dans cette base est de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où a est un réel non nul.

Question 176

On considère $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni des deux bases $\mathscr{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ et $\mathscr{B}' = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, où

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On notera P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Faux] $P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Faux] $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] La matrice de l'application identité de $M_2(\mathbb{R})$ de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est : $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Explications: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Par définition, Q est la matrice de l'application identité de $M_2(\mathbb{R})$ de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

Question 177

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$, où $u_1 = (0,1,-1), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,1,1)$, une base de $\mathbb{R}^3$. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et B la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Faux] $P=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 1-2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Explications: Soit E est un espace vectoriel, de dimension finie, muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ et f un endomorphisme de E. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ et B la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$. Alors $AP = PB$. De cette relation, on déduit que $A^n = PB^nP^{-1}$. Par définition, on a :

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie aussi que $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'où $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 1-2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Question 178

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$, où $u_1 = (0,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,0,-1)$, une base de $\mathbb{R}^3$. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et B la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] f est bijective.
- ☐ [Faux] $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- ☐ [Vrai] $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ [Vrai] $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 0 & 1-(-1)^n \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-(-1)^n & 0 & 1+(-1)^n \end{pmatrix}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Explications: On vérifie que f est bijective car le rang de la matrice A est 3 et que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit E est un espace vectoriel, de dimension finie, muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ et f un endomorphisme de E. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ et B la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$. Alors $AP = PB$. De cette relation, on déduit que $A^n = PB^nP^{-1}$. Par définition, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $n \geqslant 1$, $A^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 0 & 1-(-1)^n \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-(-1)^n & 0 & 1+(-1)^n \end{pmatrix}$

Question 179

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}' = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, où

$$a_1 = (1,0,0,0),\ a_2 = (0,1,1,0),\ a_3 = (0,1,-1,0),\ a_4 = (0,1,1,-1).$$

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$, $(w_n)_{n\geqslant 0}$ et $(k_n)_{n\geqslant 0}$ des suites récurrentes définies par la donnée des réels u_0, v_0, w_0, k_0 et pour $n \geqslant 1$:

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} u_n &=& u_{n-1} \\ v_n &=& v_{n-1} - w_{n-1} + k_{n-1} \\ w_n &=& -v_{n-1} + w_{n-1} + k_{n-1} \\ k_n &=& -k_{n-1}. \end{array} \right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\{a_2\}$ est une base de $\ker(f - Id)$ et $\{a_1\}$ est une base de $\ker f$.
- ☐ [Faux] $\{a_4\}$ est une base de $\ker(f - 2Id)$ et $\{a_3\}$ est une base de $\ker(f + Id)$.

☐ [Vrai] $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et la matrice de f dans cette base est :

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

☐ [Vrai] Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcc} u_n &=& u_0\\ v_n &=& 2^{n-1}v_0-2^{n-1}w_0+(-1)^{n-1}k_0\\ w_n &=& -2^{n-1}v_0+2^{n-1}w_0+(-1)^{n-1}k_0\\ k_n &=& (-1)^n k_0.\end{array}\right.$$

Explications: On vérifie que $\{a_1\}$ est une base de $\ker(f-Id)$, $\{a_2\}$ est une base de $\ker f$, $\{a_3\}$ est une base de $\ker(f-2Id)$, $\{a_4\}$ est une base de $\ker(f+Id)$ et que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est : $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ (c.à.d la matrice de l'identité de $\mathbb{R}_3[X]$ de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$) est : $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

De la relation : $A=PBP^{-1}$, on déduit que $A^n=PB^nP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2^{n-1} & -2^{n-1} & (-1)^{n-1}\\ 0 & -2^{n-1} & 2^{n-1} & (-1)^{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n\end{pmatrix}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

De la relation : $\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\\ w_n\\ k_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} u_{n-1}\\ v_{n-1}\\ w_{n-1}\\ k_{n-1}\end{pmatrix}$, on déduit que : $\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\\ w_n\\ k_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\\ w_0\\ k_0\end{pmatrix}$.

Question 180

On considère $\mathbb{R}_3[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, muni de sa base canonique $\mathscr{B}=\{1,X,X^2,X^3\}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$f(1)=1,\ f(X)=X-X^2,\ f(X^2)=-X+X^2,\ f(X^3)=X+X^2+2X^3.$$

On note A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. Soit $P_1=X+X^2, P_2=1, P_3=X+X^3, P_4=X^2+X^3$ et $\mathscr{B}'=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Faux] $\{P_2\}$ est une base de $\ker f$ et $\{P_1\}$ est une base de $\ker(f-Id)$.

☐ [Vrai] $\{P_3,P_4\}$ est une base de $\ker(f-2Id)$.

☐ [Vrai] $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et la matrice de f dans cette base est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

☐ [Vrai] $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & -2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & -2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Explications: La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $\{P_1\}$ est une base de $\ker f$, $\{P_2\}$ est une base de $\ker(f - Id)$, $\{P_3, P_4\}$ est une base de $\ker(f - 2Id)$ et que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, la relation $A = PBP^{-1}$ donne $A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & -2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & -2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Deuxième partie
Analyse

Primitives

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

6 Primitives des fonctions réelles

6.1 Primitives | Niveau 1

Question 181
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Si u est une fonction dérivable, strictement positive, alors $\sqrt{u}$ est une primitive de $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- ☐ [Vrai] Si u est une fonction dérivable, alors $\arctan(u)$ est une primitive de $\dfrac{u'}{1+u^2}$.
- ☐ [Faux] Si u est une fonction dérivable, alors e^u est une primitive de e^u.
- ☐ [Faux] Si u est une fonction dérivable et ne s'annulant pas, alors $\ln(u)$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$.

Explications: On a : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(\arctan(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ et $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$. Donc $2\sqrt{u}$ est une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, $\arctan(u)$ est une primitive de $\dfrac{u'}{1+u^2}$ et e^u n'est pas une primitive de e^u. Enfin, $\ln(u)$ peut ne pas être définie. Il suffit de prendre $u = -1 - x^2$, par exemple.

Question 182
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive de $f(x) = 2x + \mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $F(x) = x^2 + \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$ est une primitive de $f(x) = 2x + \mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $F(x) = x^2\mathrm{e}^x$ est une primitive de $f(x) = 2x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $F(x) = (2x-2)\mathrm{e}^x$ est une primitive de $f(x) = 2x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

Explications: On calcule $F'(x)$. Il en découle que $x^2 + \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$ est une primitive de $2x + \mathrm{e}^{2x}$ et que $(2x-2)\mathrm{e}^x$ est une primitive de $2x\mathrm{e}^x$.

Question 183
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $F(x) = \sqrt{x+1} + \mathrm{e}^x$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + \mathrm{e}^x$ sur $]-1,+\infty[$.
- ☐ [Vrai] $F(x) = 2\sqrt{x+1} + \mathrm{e}^x$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + \mathrm{e}^x$ sur $]-1,+\infty[$.
- ☐ [Faux] La primitive de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + \mathrm{e}^x$ sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0 est $F(x) = \sqrt{x+1} + \mathrm{e}^x - 2$.
- ☐ [Vrai] La primitive de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + \mathrm{e}^x$ sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0 est $F(x) = 2\sqrt{x+1} + \mathrm{e}^x - 3$.

Explications: Le calcul de $F'(x)$ montre que $2\sqrt{x+1}+\mathrm{e}^x$ est une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\mathrm{e}^x$ sur $]-1,+\infty[$. Donc, toute primitive de $f(x)$ sur $]-1,+\infty[$ est de la forme : $F(x) = 2\sqrt{x+1}+\mathrm{e}^x+k$, $k\in\mathbb{R}$, et celle qui vérifie $F(0)=0$ est $F(x)=2\sqrt{x+1}+\mathrm{e}^x-3$.

Question 184

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $F(x)=(x+1)^2+\cos(2x)$ est une primitive de $f(x)=2x+2-2\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $F(x)=x^2+2x-\cos(2x)$ est une primitive de $f(x)=2x+2-2\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $F(x)=2x^2\cos(x^2)$ est une primitive de $f(x)=4x\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $F(x)=-2x\cos(2x)+\sin(2x)$ est une primitive de $f(x)=4x\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Explications: On a : $\Big[(x+1)^2+\cos(2x)\Big]'=2x+2-2\sin(2x)$. Donc $(x+1)^2+\cos(2x)$ est une primitive de $2x+2-2\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$. De même, $-2x\cos(2x)+\sin(2x)$ est une primitive de $4x\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Question 185

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Une primitive de $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos x$.
- ☐ [Faux] Une primitive de $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)$.
- ☐ [Vrai] Une primitive de $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x-\cos x)$.
- ☐ [Vrai] Une primitive de $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-x}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Explications: $\left[\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x-\cos x)\right]'=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ et $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-x}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]'=\mathrm{e}^{-x}\cos x$. Donc $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x-\cos x)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-x}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ sont des primitives de $\mathrm{e}^{-x}\cos x$ sur $\mathbb{R}$.

Question 186

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies. Sur $]0,+\infty[$, on a :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int\left(\frac{2}{x}+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x=\frac{-2}{x^2}+2\mathrm{e}^{2x}+k$, où $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int\left(\frac{2}{x}+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x=\ln(x^2)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+k$, où $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sin x\right)\mathrm{d}x=\sqrt{x}+\cos x+k$, où $k\in\mathbb{R}$.

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x\right) \mathrm{d}x = \sqrt{x} - \cos x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Explications: On a : $\displaystyle\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x} = \ln(x^2) + k$ et $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + k$. D'où, par linéarité,

$$\int \left(\frac{2}{x} + \mathrm{e}^{2x}\right) \mathrm{d}x = \ln(x^2) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + k.$$

De même, on vérifie que : $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x\right) \mathrm{d}x = \sqrt{x} + \cos x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 187

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies. Sur $]-1, +\infty[$, on a :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3} = \frac{-3}{(x+1)^4} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3} = \frac{-1}{2(x+1)^2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln(x+1) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \frac{-1}{(x+1)^2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $u = 1 + x$, on a : $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3} = \int u^{-3}\mathrm{d}u = \frac{-1}{2}u^{-2} + k = \frac{-1}{2(x+1)^2} + k,\ k \in \mathbb{R},$$

et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + k = \ln(x+1) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Question 188

Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Une primitive de $\cos(\pi x) + \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ est $\sin(\pi x) + \ln x$.
- ☐ [Vrai] Une primitive de $\cos(\pi x) + \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ est $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi} + \ln(\pi x)$.
- ☐ [Faux] La primitive de $\cos(\pi x) + \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est $\sin(\pi x) + \ln x$.
- ☐ [Vrai] La primitive de $\cos(\pi x) + \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi} + \ln x$.

Explications: Par linéarité, les primitives de $\cos(\pi x) + \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ sont

$$F(x) = \int \left(\cos(\pi x) + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi} + \ln x + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Ensuite $F(1)=0 \Rightarrow k=0$. Donc la primitive de $\cos(\pi x)+\dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 est $F(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}+\ln x$.

Question 189

On note par F une primitive de $f(x)=x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $F(x)=x\ln x+k$, où $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $F(x)=\dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x+k$, où $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $F(x)=x\mathrm{e}^x-\displaystyle\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.
- ☐ [Vrai] $F(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+k$, où $k\in\mathbb{R}$.

Explications: Une intégration par parties avec $u=x$ et $v=\mathrm{e}^x$ donne

$$F(x)=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+k,\ \text{où } k\in\mathbb{R}.$$

Question 190

On note par F une primitive de $f(x)=\ln x$ sur $]0,+\infty[$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $F(x)=\mathrm{e}^x+k$, $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $F(x)=x\ln x-\displaystyle\int \mathrm{d}x$.
- ☐ [Vrai] $F(x)=x\ln x-x+k$, $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $F(x)=\dfrac{1}{x}+k$, $k\in\mathbb{R}$.

Explications: Une intégration par parties avec $u=\ln x$ et $v=x$ donne

$$\int \ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int \mathrm{d}x=x\ln x-x+k,\ k\in\mathbb{R}.$$

6.2 Primitives | Niveau 2

Question 191

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Sur $]-1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^3}=\frac{1}{3}\ln(1+x^3)+k$, où $k\in\mathbb{R}$.

- ☐ [Faux] Sur $]-1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{x^3}{3(1+x^3)} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Sur $]1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] Sur $]1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $u = 1+x^3$, on a : $\mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x$ et

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + k = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

De même, avec $u = x-1$, on a $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ et

$$\int \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^{3/2} + k = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 192

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int 4x^3(2+x^4)^3\mathrm{d}x = x^4(2+x^4)^3 + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int 4x^3(2+x^4)^3\mathrm{d}x = \frac{(2+x^4)^4}{4} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{6x\mathrm{d}x}{1+3x^2} = 6\int x\mathrm{d}x \times \int \frac{\mathrm{d}x}{1+3x^2} = 3x^2 \times \ln(1+3x^2) + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{6x\mathrm{d}x}{1+3x^2} = \ln(1+3x^2) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $u = 2+x^4$, on a : $\mathrm{d}u = 4x^3\mathrm{d}x$ et

$$\int 4x^3(2+x^4)^3\mathrm{d}x = \int u^3\mathrm{d}u = \frac{u^4}{4} + k = \frac{(2+x^4)^4}{4} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

De même, avec $u = 1+3x^2$, on a : $\mathrm{d}u = 6x\mathrm{d}x$ et

$$\int \frac{6x\mathrm{d}x}{1+3x^2} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(u) + k = \ln(1+3x^2) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 193

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int 4x\sqrt{2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2x^2+1)^{3/2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \sqrt{2x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2x^2+1)^{3/2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{3x\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2+2}} = \sqrt{3x^2+2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{3x^2+2}} = \sqrt{3x^2+2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $u = 2x^2+1$, on a : $\mathrm{d}u = 4x\mathrm{d}x$ et

$$\int 4x\sqrt{2x^2+1}\mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^{3/2} + k = \frac{2}{3}(2x^2+1)^{3/2} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

De même, avec $u = 3x^2+2$, on a : $\mathrm{d}u = 6x\mathrm{d}x$ et

$$\int \frac{3x\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2+2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + k = \sqrt{3x^2+2} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 194

Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Les primitives de $16x^3(x^4+1)^3$ sur $\mathbb{R}$ sont données par $F(x) = x^4(x^4+1)^4 + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] Les primitives de $16x^3(x^4+1)^3$ sur $\mathbb{R}$ sont données par $F(x) = (x^4+1)^4 + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] Les primitives de $\dfrac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}$ sur $\mathbb{R}$ sont données par $F(x) = 2\sqrt{x^4+1} + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Les primitives de $\dfrac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}$ sur $\mathbb{R}$ sont données par $F(x) = \dfrac{x^4}{\sqrt{x^4+1}} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $u = x^4+1$, on a : $\mathrm{d}u = 4x^3\,\mathrm{d}x$. D'où

$$\int 16x^3(x^4+1)^3\mathrm{d}x = \int 4u^3\,\mathrm{d}u = u^4 + k = (x^4+1)^4 + k,\ k \in \mathbb{R},$$

et

$$\int \frac{4x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + k = 2\sqrt{x^4+1} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 195

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{1+4x^2}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{3x} + \arctan(2x) + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{1+4x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} + \frac{\arctan(2x)}{2} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

☐ [Vrai] $\displaystyle\int\left(\mathrm{e}^{3x}+\frac{4}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}+4\arctan x+k,\ k\in\mathbb{R}.$

☐ [Faux] $\displaystyle\int\left(\mathrm{e}^{3x}+\frac{4}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{3x}+4\arctan x+k,\ k\in\mathbb{R}.$

Explications: Utiliser la linéarité en remarquant que : $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}+k_1,$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2}=\frac{\arctan(2x)}{2}+k_2 \quad \text{et} \quad \int\frac{4\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=4\arctan x+k_3,\ k_i\in\mathbb{R}.$$

Question 196

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Faux] Sur $]0,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\ln x=\ln x\times\ln x+k,\ k\in\mathbb{R}.$

☐ [Vrai] Sur $]0,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln x\times\ln x+k,\ k\in\mathbb{R}.$

☐ [Vrai] Sur $]1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln(\ln x)+k,\ k\in\mathbb{R}.$

☐ [Faux] Sur $]1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln(x\ln x)+k,\ k\in\mathbb{R}.$

Explications: Avec $u=\ln x$, on aura : $\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. D'où

$$\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}u^2+k=\frac{1}{2}(\ln x)^2+k,\ k\in\mathbb{R}$$

et

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln|u|+k=\ln(\ln x)+k,\ k\in\mathbb{R}.$$

Question 197

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Vrai] Sur $]1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=\frac{-1}{\ln x}+k,\ k\in\mathbb{R}.$

☐ [Faux] Sur $]1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=\ln(x\ln^2 x)+k,\ k\in\mathbb{R}.$

☐ [Faux] Sur $]1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{2x\sqrt{\ln x}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\times\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}=\frac{\sqrt{\ln x}}{2}+k,\ k\in\mathbb{R}.$

☐ [Vrai] Sur $]1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{2x\sqrt{\ln x}}=\sqrt{\ln x}+k,\ k\in\mathbb{R}.$

Explications: Avec $u = \ln x$, on aura : $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. D'où

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{-1}{u} + k = \frac{-1}{\ln x} + k,\ k \in \mathbb{R}$$

et

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + k = \sqrt{\ln x} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 198

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}(1+x^2)^{3/2} + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $u = x^2 + 1$, on a $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$. D'où

$$\int x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\mathrm{d}u = \frac{u^{3/2}}{3} + k = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + k,\ k \in \mathbb{R},$$

et

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + k = \sqrt{x^2+1} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 199

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{(1+x^2)} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \ln\sqrt{1+x^2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(1+x^2)} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $u = 1 + x^2$, on a : $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$. D'où

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln(u) + k = \ln\sqrt{1+x^2} + k,\ k \in \mathbb{R},$$

et

$$\int x\mathrm{e}^{(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{e}^u + k = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(1+x^2)} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 200

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Le changement de variable $u = x(1+x^4)$ donne $\displaystyle\int 4x^3(1+x^4)^3\mathrm{d}x = \int 4u^3\mathrm{d}u$.
- ☐ [Vrai] Le changement de variable $u = 1 + x^4$ donne $\displaystyle\int 4x^3(1+x^4)^3\mathrm{d}x = \int u^3\mathrm{d}u$.
- ☐ [Faux] Le changement de variable $u = 2x$ donne $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.
- ☐ [Vrai] Le changement de variable $u = 2x$ donne $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

Explications: Avec $u = 1 + x^4$, on a : $\mathrm{d}u = 4x^3\mathrm{d}x$. D'où $\displaystyle\int 4x^3(1+x^4)^3\mathrm{d}x = \int u^3\mathrm{d}u$. De même, avec $u = 2x$, on a : $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$. D'où $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

Question 201

On note par F une primitive de $f(x) = x\ln x$ sur $]0,+\infty[$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int x\mathrm{d}x$.
- ☐ [Faux] $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x}{2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Une intégration par parties, avec $u = \ln x$ et $v = x^2/2$, donne

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 202
Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int x\cos(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(1+x^2)+k$, où $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin(2+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \times \int \sin(2+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int x\cos(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\sin(1+x^2)+k$, où $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin(2+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = -\cos(2+\mathrm{e}^x)+k$, où $k\in\mathbb{R}$.

Explications: Avec $u=1+x^2$, on a : $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ et

$$\int x\cos(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\times\sin(u)+k = \frac{1}{2}\sin(1+x^2)+k,\ k\in\mathbb{R}.$$

De même, avec $u=2+\mathrm{e}^x$, on a : $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ et

$$\int \mathrm{e}^x\sin(2+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int \sin(u)\mathrm{d}u = -\cos(u)+k = -\cos(2+\mathrm{e}^x)+k,\ k\in\mathbb{R}.$$

Question 203
Le changement de variable $u=\sqrt{x}$ donne :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \cos(u)+k,\ k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \sin(u)\mathrm{d}u$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = -2\cos(u)+k,\ k\in\mathbb{R}$.

Explications: Avec $u=\sqrt{x}$, on a : $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$. D'où

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \sin(u)\mathrm{d}u = -2\cos(u)+k,\ k\in\mathbb{R}.$$

Question 204
Le changement de variable $u=\dfrac{1}{x}$ donne :

- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\sin(1/x)}{x^2}\mathrm{d}x = -\int \sin(u)\mathrm{d}u$.

- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\sin(1/x)}{x^2}\mathrm{d}x = \cos(1/x) + k,\ k \in \mathbb{R}.$
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \sin(1/x)\mathrm{d}x = \int \sin(u)\mathrm{d}u.$
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \sin(1/x)\mathrm{d}x = -\cos(u) + k,\ k \in \mathbb{R}.$

Explications: Avec $u = \dfrac{1}{x}$, on aura : $\mathrm{d}u = \dfrac{-\mathrm{d}x}{x^2}$. D'où

$$\int \frac{\sin(1/x)}{x^2}\mathrm{d}x = -\int \sin(u)\mathrm{d}u = \cos(u) + k = \cos(1/x) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 205

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \cos x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2 x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \cos x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos^2 x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \cos x \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3 x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \cos^2 x \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin^4 x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $u = \sin x$, on a : $\mathrm{d}u = \cos x \mathrm{d}x$,

$$\int \cos x \sin x \mathrm{d}x = \int u \mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + k = \frac{1}{2}\sin^2 x + k,\ k \in \mathbb{R},$$

et

$$\int \cos x \sin^2 x \mathrm{d}x = \int u^2 \mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^3 + k = \frac{1}{3}\sin^3 x + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 206

Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Le changement de variable $u = \cos x$ donne $\displaystyle\int \cos^3 x \mathrm{d}x = \int u^3 \mathrm{d}u.$
- ☐ [Vrai] Le changement de variable $u = \sin x$ donne $\displaystyle\int \cos^3 x \mathrm{d}x = \int (1-u^2)\mathrm{d}u.$
- ☐ [Faux] Le changement de variable $u = \sin x$ donne $\displaystyle\int \sin^3 x \mathrm{d}x = \int u^3 \mathrm{d}u.$

☐ [Vrai] Le changement de variable $u = \cos x$ donne $\displaystyle\int \sin^3 x \mathrm{d}x = \int (u^2 - 1)\mathrm{d}u$.

Explications: On a : $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x)\cos x$. Donc, avec $u = \sin x$, on a : $\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$ et

$$\int \cos^3 x \mathrm{d}x = \int (1 - \sin^2 x)\cos x \mathrm{d}x = \int (1 - u^2)\mathrm{d}u.$$

De même, on a : $\sin^3 x = (1 - \cos^2 x)\sin x$. Donc, avec $u = \cos x$, on a : $\mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x$ et

$$\int \cos^3 x \mathrm{d}x = \int (1 - \cos^2 x)\sin x \mathrm{d}x = -\int (1 - u^2)\mathrm{d}u.$$

6.3 Primitives | Niveau 3

Question 207

Le changement de variable $u = 2 + \cos x$ donne :

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \sin x(2 + \cos x)^5 \mathrm{d}x = -\frac{(2 + \cos x)^6}{6} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int (2 + \cos x)^5 \mathrm{d}x = \frac{((2 + \cos x)^5)^6}{6} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \sin x \,(2 + \cos x)^{-3} \,\mathrm{d}x = \frac{(2 + \cos x)^{-2}}{2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int (2 + \cos x)^{-3} \,\mathrm{d}x = \frac{(2 + \cos x)^{-2}}{2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $u = 2 + \cos x$, on a : $\mathrm{d}u = -\sin x \,\mathrm{d}x$. D'où

$$\int \sin x(2 + \cos x)^5 \mathrm{d}x = -\int u^5 \mathrm{d}u = -\frac{u^6}{6} + k, \ k \in \mathbb{R},$$

et

$$\int \sin x(2 + \cos x)^{-3} \mathrm{d}x = -\int u^{-3} \mathrm{d}u = \frac{u^{-2}}{2} + k, \ k \in \mathbb{R}.$$

Question 208

Le changement de variable $u = 2 + \sin x$ donne :

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \cos x \mathrm{e}^{2+\sin x} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2+\sin x} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2+\sin x} \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^u \mathrm{d}u$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2 + \sin x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u}$.

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\cos x \mathrm{d}x}{2+\sin x} = \ln(2+\sin x)+k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $u = 2+\sin x$, on a : $\mathrm{d}u = \cos x \mathrm{d}x$ et puis

$$\int \cos x \mathrm{e}^{2+\sin x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{u} + k = \mathrm{e}^{2+\sin x} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, $\displaystyle\int \frac{\cos x \mathrm{d}x}{2+\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + k = \ln(2+\sin x)+k$, $k \in \mathbb{R}$.

Question 209

Le changement de variable $u = \sin x$ donne :

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \arctan(u)+k$, $k \in \mathbb{R}$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \arctan(u)+k$, $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $u = \sin x$, on aura $\mathrm{d}u = \cos x \mathrm{d}x$. D'où

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan(u)+k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 210

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Faux] $\displaystyle\int \cos(2x)\sqrt{1+\sin(2x)}\mathrm{d}x = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{1+\sin(2x)}} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \cos(2x)\sqrt{1+\sin(2x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[1+\sin(2x)\right]^{3/2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\sin(3x)\mathrm{d}x}{2-\cos(3x)} = \frac{1}{3}\ln\left[2-\cos(3x)\right] + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\cos(3x)} = \ln\left[2-\cos(3x)\right] + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $u = 1+\sin(2x)$, on aura $\mathrm{d}u = 2\cos(2x)\mathrm{d}x$. D'où

$$\int \cos(2x)\sqrt{1+\sin(2x)}\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^{3/2} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

De même, avec $u = 2-\cos(3x)$, on aura $\mathrm{d}u = 3\sin(3x)\mathrm{d}x$. D'où

$$\int \frac{\sin(3x)\mathrm{d}x}{2-\cos(3x)} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 211
Le changement de variable $u = \mathrm{e}^x$ donne :

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \arctan(u) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \arctan(u) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $u = \mathrm{e}^x$, on aura : $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$. D'où

$$\int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan(u) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 212
On se place sur $]0, +\infty[$. Le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-x}$ donne

☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$.

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}} = -\arcsin(u) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}} = \int \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$.

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}} = \sqrt{(1-u^2)} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $u = \mathrm{e}^{-x}$, on aura : $\mathrm{d}u = -\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$. D'où

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}} = \int \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin(u) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Et

$$\int \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}} = \int \frac{\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}} = \int \frac{-u\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{(1-u^2)} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 213
On note par F une primitive de $f(x) = \arcsin(x)$ sur $]-1, 1[$. Parmi les propositions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $F(x) = x\arcsin(x) - \displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- ☐ [Faux] $F(x) = \arccos(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $F(x) = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Une intégration par parties avec $u = \arcsin(x)$ et $v = x$ donne

$$F(x) = x\arcsin(x) - \int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 214

On note par F une primitive de $f(x) = \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$. Parmi les propositions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $F(x) = x\arctan(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $F(x) = x\arctan(x) - \displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$.
- ☐ [Vrai] $F(x) = x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Une intégration par parties avec $u = \arctan(x)$ et $v = x$ donne

$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 215

On se place sur $]-1, +\infty[$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x+1} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1) - \int \mathrm{d}x$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int x\ln(1+x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x \times \ln(1+x) = \frac{x^2}{2}\ln(1+x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int x\ln(1+x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{2(1+x)}$.

Explications: Une intégration par parties avec $u = \ln(x+1)$ et $v = x+1$ donne

$$\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1) - \int \mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1) - x + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Une intégration par parties avec $u = \ln(x+1)$ et $v = x^2/2$ donne

$$\int x\ln(1+x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{2(1+x)}.$$

Question 216

Soit $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] f admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] La fonction F telle que $F(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La fonction F telle que $F(x) = \dfrac{\pi}{4} - \arctan\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] La primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est définie par $F(x) = \dfrac{\pi}{4} - \arctan(\mathrm{e}^x)$.

Explications: La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle y admet des primitives. Avec $t = \mathrm{e}^{-x}$, on a : $\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = -\arctan(t) + k = -\arctan\left(\mathrm{e}^{-x}\right) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

La condition $F(0) = 0$ implique que $k = \dfrac{\pi}{4}$.

Question 217

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- ☐ [Faux] L'égalité $x^2 = (x^2-1)+1$ donne : $\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.
- ☐ [Vrai] Une primitive de $\sqrt{1-x^2}$ sur $]-1,1[$ est $\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin(x)$.

Explications: D'abord $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$. Une intégration par parties avec $u = \sqrt{1-x^2}$ et $v = x$ donne

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ensuite, en écrivant $-x^2 = (1-x^2)-1$, on obtient :

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

D'où : $\displaystyle 2\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + k$.

Question 218
On pose $t = \cos x$ pour $x \in]0, \pi[$. Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$.
- ☐ [Vrai] $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\},\ \dfrac{2}{t^2-1} = \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Explications: Avec $t = \cos x$, on a : $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$ et

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{-\mathrm{d}t}{1-t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}.$$

Or, $\dfrac{2}{t^2-1} = \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}$. Donc $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Question 219
On note par F une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \dfrac{1}{2+4x^2-4x}$. Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $f(x) = \dfrac{1}{1+(2x-1)^2}$.
- ☐ [Faux] $F(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ avec $u = 2x-1$.
- ☐ [Faux] $F(x) = \arctan(2x-1) + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $F(x) = \dfrac{1}{2}\arctan(2x-1) + k,\ \ k \in \mathbb{R}$.

Explications: On a : $2+4x^2-4x = 1+(2x-1)^2$ et avec $u = 2x-1$, on a : $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$ et

$$F(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arctan u + k = \frac{1}{2}\arctan(2x-1) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 220
On note par F une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}$. Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2} + \dfrac{1}{x^2+2x+2}$.
- ☐ [Faux] $F(x) = \ln(x^2+2x+2) + \dfrac{1}{x^2+2x+2} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

☐ [Faux] $F(x) = \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x^2+2x+2) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

☐ [Vrai] $F(x) = \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Explications: L'égalité $2x+3 = (2x+2)+1$ donne : $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2} + \dfrac{1}{1+(x+1)^2}$. Donc, par linéarité : $F(x) = \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + k$ pour un $k \in \mathbb{R}$.

6.4 Primitives | Niveau 4

Question 221

Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Faux] Le changement de variable $x = \sin t$ pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ donne :

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \cos t\,\mathrm{d}t.$$

☐ [Vrai] Le changement de variable $x = \sin t$ pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ donne :

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

☐ [Faux] $\displaystyle\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} + k = \frac{t}{2} - \frac{\sin t\cos t}{2} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

☐ [Vrai] Une primitive de $\sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$ est $\dfrac{\arcsin x}{2} + \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$.

Explications: Avec $x = \sin t$, on a : $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ car $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. D'où

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{t}{2} + \frac{\sin t\cos t}{2} + k = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 222

Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose $t = x^2$. Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4-x^2-2} = \int \frac{\sqrt{t}\mathrm{d}t}{t^2-t-2}$.

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4-x^2-2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t-2}$.

☐ [Vrai] $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$, $\dfrac{3}{t^2-t-2} = \dfrac{1}{t-2} - \dfrac{1}{t+1}$ et $\displaystyle\int \frac{3\,\mathrm{d}t}{t^2-t-2} = \ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right| + k$, $k \in \mathbb{R}$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4-x^2-2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2+1}\right| + k,\ k \in \mathbb{R}.$

Explications: Avec $t = x^2$, on a : $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-x^2-2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-2)(t+1)}$. Or, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,2\}$, $\displaystyle\frac{3}{t^2-t-2} = \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+1}$. Donc $\displaystyle\int \frac{3\,\mathrm{d}t}{t^2-t-2} = \ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right| + k,\ k \in \mathbb{R}$, et ensuite : $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4-x^2-2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2+1}\right| + k,\ k \in \mathbb{R}.$

Question 223

Le changement de variable $t = x^2$, pour $x \in]0, +\infty[$, donne :

☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{2\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}.$

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{2\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)^2}.$

☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{2\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)^2}.$

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{2\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}.$

Explications: Avec $t = x^2$, on a : $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$ et

$$\int \frac{2\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)^2}.$$

Ensuite, on décompose en éléments simples donne :

$$\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}.$$

Question 224

Pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, on pose $t = \tan(x)$ et on rappelle que $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Faux] $\displaystyle\frac{1}{1+\sin^2 x} = \frac{1+t^2}{1+2t^2}$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{1+t^2}{1+2t^2}\mathrm{d}t.$

☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t) + k,\ k \in \mathbb{R}.$

☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{1}{1+2t^2}\mathrm{d}t.$

☐ [Vrai] Sur $]-\pi/2, \pi/2[$, on a : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) + k,\ k \in \mathbb{R}.$

Explications: Avec $t=\tan x$, on aura $\dfrac{1}{1+\sin^2 x}=\dfrac{1+t^2}{1+2t^2}$ et $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. D'où

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}=\int \frac{\mathrm{d}t}{1+2t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t)+k,\ k\in\mathbb{R}.$$

Question 225

Pour $x\in]-\pi/2,\pi/2[$, on pose $t=\cos x$. Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\tan x\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}=\tan x\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\tan x.\arctan(\cos x)+k,\ k\in\mathbb{R}.$
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\tan x\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2)}.$
- ☐ [Faux] $\forall t\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{t(1+t^2)}=\dfrac{t}{1+t^2}-\dfrac{1}{t}$ et donc $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2)}=\ln\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\right)+k$, $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] Sur $]-\pi/2,\pi/2[$, on a : $\displaystyle\int\frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}=\ln\left(\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}\right)+k,\ k\in\mathbb{R}.$

Explications: Avec $t=\cos x$, on aura $\dfrac{\tan x}{1+\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2 x)}$ et $\mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$. D'où

$$\int\frac{\tan x\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2)}=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)-\ln|t|+k,\ k\in\mathbb{R}.$$

Question 226

Le changement de variable $t=\sin x$ donne :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}=\cos^3 x\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}=\cos^3 x.\arctan(\sin x)+k,\ k\in\mathbb{R}.$
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}=-t+2\arctan t+k,\ k\in\mathbb{R}.$

Explications: D'abord, $\dfrac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}=\dfrac{\cos x(1-\sin^2 x)}{1+\sin^2 x}$. Ensuite $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$ et

$$\int\frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int\left(-1+\frac{2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=-t+2\arctan t+k,\ k\in\mathbb{R}.$$

Question 227

On se place dans l'intervalle $]-\pi,\pi[$ et on rappelle que $\cos x = \dfrac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$ et que $\sin x = \dfrac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$. Le changement de variable $t=\tan(x/2)$ donne :

- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{3+t^2}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+k,\ k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}\ln(t^2+t+1)+k,\ k\in\mathbb{R}$.

Explications: Avec $t=\tan(x/2)$, on a : $\mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$,

$$\frac{1}{2+\cos x} = \frac{1+t^2}{3+t^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2+\sin x} = \frac{1+t^2}{2(t^2+t+1)}.$$

D'où

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+k,\ \ k\in\mathbb{R}.$$

et

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+k,\ \ k\in\mathbb{R}.$$

Question 228

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Le changement de variable $t=\sqrt{x}$ donne $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1} + \int \frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{t^2+1} + \arctan t + k,\ k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)^2}$ sur $]0,+\infty[$ est $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}+\arctan\sqrt{x}\right)$.

Explications: Avec $t=\sqrt{x}$, on a : $x=t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$. Une intégration par parties avec $u=\dfrac{1}{t^2+1}$ et $v=t$ donne

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1} + \int \frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{t^2+1} + \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} - \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}.$$

D'où $\displaystyle\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{t^2+1} + \arctan t + k \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{\sqrt{x}}{x+1} + \arctan\sqrt{x} + k,\ k \in \mathbb{R}.$

Question 229

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Le changement de variable $t = \sqrt{x}$ donne $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x-1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$.
- ☐ [Vrai] $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\displaystyle\frac{4}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int \frac{4\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2} = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{2t}{t^2-1} + k,\ k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Une primitive de $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)^2}$ sur $]1, +\infty[$ est $\displaystyle\ln\left|\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right| - \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$.

Explications: Avec $t = \sqrt{x}$, on a : $x = t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x-1)^2} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$. La décomposition en éléments simples donne : $\displaystyle\frac{4}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2}$.
Donc

$$\int \frac{4\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2} = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{2t}{t^2-1} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x-1)^2} = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{2t}{t^2-1}\right) + k = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right| - \frac{2\sqrt{x}}{x-1}\right) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Question 230

Soient a et b deux réels et f la fonction telle que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{ax^2+b}}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Si a et b sont strictement positifs, il existe une constante C telle que $F(x) = C\arcsin\left(x\sqrt{a/b}\right)$ soit une primitive de $f(x)$.
- ☐ [Vrai] Si a et b sont strictement positifs, il existe une constante C telle que $F(x) = C\sqrt{ax^2+b}$ soit une primitive de $xf(x)$.
- ☐ [Vrai] Si a est strictement négatif et b est strictement positif, il existe une constante C telle que $F(x) = C\arcsin\left(x\sqrt{-a/b}\right)$ soit une primitive de $f(x)$.
- ☐ [Faux] Si a est strictement positif et b est strictement négatif, il existe une constante C telle que $F(x) = C\arcsin\left[x\sqrt{a/(-b)}\right]$ soit une primitive de $f(x)$.

Explications: Il suffit de dériver : $\left[C\arcsin\left(x\sqrt{a/b}\right)\right]' = \dfrac{C\sqrt{a}}{\sqrt{b-ax^2}} \neq f(x)$ pour tout $C \in \mathbb{R}$.
Par contre,

$$\left(C\sqrt{ax^2+b}\right)' = \frac{Cax}{\sqrt{ax^2+b}} = xf(x) \quad \text{si} \quad C = a^{-1}.$$

Si a est strictement négatif et b est strictement positif,

$$\left[C\arcsin\left(x\sqrt{-a/b}\right)\right]' = \frac{C\sqrt{-a}}{\sqrt{b+ax^2}} = f(x) \quad \text{si} \quad C\sqrt{-a} = 1.$$

Par contre, si a est strictement positif et b est strictement négatif alors, pour tout $C \in \mathbb{R}$, $\left[C\arcsin\left(x\sqrt{a/(-b)}\right)\right]' \neq f(x)$.

Calculs d'intégrales

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

7 Calculs d'intégrales

7.1 Calculs d'intégrales | Niveau 1

Question 231
Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(1+1)^2} - \frac{1}{(0+1)^2} = -\frac{3}{4}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \frac{1}{1+1} - \frac{1}{0+1} = -\frac{1}{2}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}} = 2(\sqrt{2}-1)$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$.

Explications: Avec $u = 1+x$, on a : $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $u(0) = 1$, $u(1) = 2$ et

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \left[\frac{-1}{u}\right]_1^2 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u} = \left[\ln u\right]_1^2 = \ln 2.$$

De même, on vérifie que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}} = 2(\sqrt{2}-1)$ et $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

Question 232
Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2-1$.

- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln 2$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \ln 3$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

Explications: On a : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^1 = \mathrm{e}-1$ mais $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. De même

$$\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = \ln 2 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \Big[\ln(x+2)\Big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2.$$

Enfin,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \pi/4.$$

Question 233

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \pi + \int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \pi - 2$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \pi$.

Explications: Une intégration par parties, avec $u = x$ et $v = -\cos x \Rightarrow v' = \sin x$, donne

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = \pi + \int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Question 234

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$.

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x = 2$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x = -2$.

Explications: Une intégration par parties, avec $u = x$ et $v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$, donne

$$\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = -\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = \Big[\cos x\Big]_0^\pi = -2.$$

Question 235

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\mathrm{d}t = \Big[t\ln t\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}t$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\mathrm{d}t = 1$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_1^2 t\ln t\mathrm{d}t = \Big[t^2\ln t\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} t\mathrm{d}t$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_1^2 t\ln t\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^2+1}{2}$.

Explications: Une intégration par parties avec $u = \ln t$ et $v = t \Rightarrow v' = 1$ donne :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\mathrm{d}t = \Big[t\ln t\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}t = 1.$$

Une intégration par parties, avec $u = \ln t$ et $v = t^2/2 \Rightarrow v' = t$, donne :

$$\int_1^2 t\ln t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$$

Question 236

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \Big[x\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = 1$.

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 x e^x dx$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 1$.

Explications: Une intégration par parties avec $u = x$ et $v = e^x \Rightarrow v' = e^x$ donne :

$$\int_0^1 x e^x \, dx = \left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = 1.$$

Une intégration par parties avec $u = x^2$ et $v = e^x \Rightarrow v' = e^x$ donne :

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 x e^x \, dx = e - 2.$$

7.2 Calculs d'intégrales | Niveau 2

Question 237

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t = \pi - x$ donne $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$.
- ☐ [Faux] Le changement de variable $t = 2x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \frac{dt}{2}$.
- ☐ [Faux] Le changement de variable $t = 2x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x) \, dx = \int_0^{\pi/4} \sin t \, \frac{dt}{2}$.
- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t = 2x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt$.

Explications: Avec $t = \pi - x$, on a : $dt = -dx$, $t(\pi/2) = \pi/2$, $t(\pi) = 0$ et

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \, dx = -\int_{\pi/2}^{0} \sin(\pi - t) \, dt = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt.$$

Avec le changement de variable $t = 2x$, on a : $dt = 2dx$, $t(0) = 0$, $t(\pi/2) = \pi$ et

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x) \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin t \, dt = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt \quad \text{car} \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \sin t \, dt = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt.$$

Question 238

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Le changement de variable $t = \ln x$ donne $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$.
- ☐ [Faux] Le changement de variable $t = 1-x^2$ donne $\displaystyle\int_0^1 2x\mathrm{e}^{1-x^2}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t$.
- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t = 1+\mathrm{e}^x$ donne $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \ln 2$.
- ☐ [Vrai] Pour tout réel $a>0$, on a : $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = 0$.

Explications: Le changement de variable $t = \ln x$ donne : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Avec $t = 1-x^2$ dans la seconde intégrale, on obtient : $\displaystyle\int_0^1 2x\mathrm{e}^{1-x^2}\mathrm{d}x = -\int_1^0 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \mathrm{e}-1$. Ensuite, avec $t = 1+\mathrm{e}^x$ dans la troisième intégrale, on obtient : $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int_2^4 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 2$. Enfin, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ est impaire. Donc, pour tout $a>0$: $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = 0$.

Question 239

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Le changement de variable $t = \ln x$ donne $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1$.
- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t = x^2+1$ donne $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{4}{5}$.
- ☐ [Faux] Le changement de variable $t = x^2+1$ donne $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = 1$.
- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t = \cos x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = 1$.

Explications: Le changement de variable $t = \ln x$ donne : $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 2$.
Ensuite, avec $t = x^2+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, on obtient : $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{4}{5}$ et

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \sqrt{2}-1.$$

Enfin, avec $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$, on obtient : $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = -\int_1^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1$.

Question 240

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{2 + \sin x} = \ln 3$.

Explications: Avec $u = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin x \, \mathrm{d}x$: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x = -\int_1^0 u^2 \, \mathrm{d}u = \frac{1}{3}$.
Avec $u = \sin x$, on a : $\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 u^2 \, \mathrm{d}u = \frac{1}{3}$.
Ensuite, avec $u = \sqrt{x}$, on a : $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2\int_1^2 \mathrm{e}^u \mathrm{d}u = 2(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e})$.
Enfin, avec $u = 2 + \sin x$, on obtient : $\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{2 + \sin x} = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln 3$.

Question 241

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \tan x \, \mathrm{d}x$ est égale à :

- ☐ [Faux] $\dfrac{4}{3}$.
- ☐ [Faux] $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x \, \mathrm{d}x$.
- ☐ [Vrai] $\dfrac{1}{2} \ln 3$.

Explications: La relation de Chasles donne $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \tan x \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \tan x \, \mathrm{d}x + \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x \, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \tan x \, \mathrm{d}x = 0$ car tan est impaire. Ensuite, on écrit $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et on pose $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x$. D'où, $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x \, \mathrm{d}x = -\int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln \sqrt{3}$.

Question 242

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \mathrm{d}\,t = \frac{-5}{4}$.

- ☐ [Vrai] $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\dfrac{x}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$, et donc $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} - \ln 2$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^{1/2} = \arctan(1/2)$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \Big[\arctan(-x)\Big]_0^{1/2} = \arctan(-1/2)$.

Explications: Par linéarité, on a : $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}\,t = \left[-\frac{1}{t} - 2\sqrt{t}\right]_1^4 = \frac{-5}{4}$.

On vérifie que : $\dfrac{x}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$, donc, par linéarité,

$$\int_{-1}^{0} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \left[\ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Enfin, $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}\right)$. Donc, par linéarité,

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x} + \frac{1}{2}\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^{1/2} = \ln\sqrt{3}.$$

Question 243

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t = \sin x$ donne $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x \tan x} = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$.
- ☐ [Faux] Le changement de variable $t = \cos x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin x \mathrm{e}^{\cos x} \mathrm{d}\,x = \int_1^{1/2} \mathrm{e}^t \mathrm{d}\,t$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin x \mathrm{e}^{\cos x} \mathrm{d}\,x = \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}$.

Explications: Avec $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$, on a : $t(\pi/6) = 1/2$, $t(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ et

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x \tan x} = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x \mathrm{d}\,x}{\sin^2 x} = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_{1/2}^{1/\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}.$$

Avec $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$, on a : $t(0) = 1$, $t(\pi/3) = 1/2$ et

$$\int_0^{\pi/3} \sin x \mathrm{e}^{\cos x} \mathrm{d}\,x = \int_{1/2}^{1} \mathrm{e}^t \mathrm{d}\,t = \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Question 244

Soit $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\frac{1}{5}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x < \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x < \int_0^2 x\,\mathrm{d}x$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln 5$.

Explications: Avec $t = x^2$, on a : $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, $t(0) = 0$, $t(2) = 4$ et

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \frac{1}{2}\Big[\ln(t+1)\Big]_0^4 = \frac{1}{2}\ln 5.$$

Pour tout $x \in]0,2[$, on a : $\dfrac{x}{5} < f(x) < x$. Donc $\displaystyle\frac{1}{5}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x < \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x < \int_0^2 x\,\mathrm{d}x$. Enfin, la fonction f étant impaire sur $\mathbb{R}$, pour tout $a > 0$, on a : $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

7.3 Calculs d'intégrales | Niveau 3

Question 245

On note $I = \displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$ et $J = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$. Le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$ donne :

- ☐ [Vrai] $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{12}$.
- ☐ [Faux] $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln 2$.
- ☐ [Faux] $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 3 - \ln 2$.
- ☐ [Vrai] $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = 2\ln 2 - \ln 3$.

Explications: Avec $t = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, on a : $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{12}$.

Avec $t = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, on a : $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = \left[\ln\frac{t}{1+t}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \ln 3$.

Question 246

On note $I = \displaystyle\int_0^2 x^2 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $I \leqslant 4\displaystyle\int_0^2 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.
- ☐ [Faux] $I \geqslant \ln 3\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$.
- ☐ [Faux] $I = \dfrac{8}{3}\ln 3 + \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x+1}$.
- ☐ [Vrai] $I = 3\ln 3 - \dfrac{8}{9}$.

Explications: Pour tout $x \in]0,2[$, $x^2\ln(x+1) < 4\ln(x+1)$ et $x^2\ln(x+1) < x^2\ln 3$. Donc $I < 4\displaystyle\int_0^2 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ et $I < \ln 3\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$. Enfin, une intégration par parties avec $u = \ln(x+1)$ et $v = x^3/3$ donne :

$$I = \frac{8}{3}\ln 3 - \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x+1} = 3\ln 3 - \frac{8}{9}.$$

Question 247

On pose $I = \displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Le changement de variable $t = 1-x^2$ donne $I = -\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$.
- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t = 1-x^2$ donne $I = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$.
- ☐ [Faux] Le changement de variable $t = x^2$ donne $I = \displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t}}$.
- ☐ [Vrai] Le changement de variable $x = \sin t$ donne $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin t\,\mathrm{d}t$.

Explications: Avec $t = 1-x^2$, on a : $t(0) = 1$, $t(1/\sqrt{2}) = 1/2$, $\mathrm{d}t = -2x\mathrm{d}x$ et $I = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$.

Avec $t = x^2$, on a : $t(0) = 0$, $t(1/\sqrt{2}) = 1/2$, $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$ et $I = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t}}$.

Avec $x = \sin t$, on a : $t(0) = 0$, $t(1/\sqrt{2}) = \pi/4$, $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et

$$I = \int_0^{\pi/4} \sin t\,\mathrm{d}t.$$

Question 248

On pose $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $I = J$.
- ☐ [Faux] $I = \dfrac{1}{J}$.
- ☐ [Vrai] $I = \dfrac{1}{2}\ln 3$.
- ☐ [Faux] $J = -\ln\sqrt{3}$.

Explications: Avec $t = \pi/2 - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$, on obtient : $I = -\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t = J$.

Avec $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$, on obtient : $I = \displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\sqrt{3}$.

Question 249

On pose $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1+2\sin x}$, $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)\,\mathrm{d}x}{1+2\sin x}$ et $I = I_1 + I_2$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $I = 1$.
- ☐ [Faux] $I_1 = 2\ln 3$.
- ☐ [Vrai] $I_1 = \dfrac{1}{2}\ln 3$.
- ☐ [Faux] $I_2 = 1 - 2\ln 3$.

Explications: Dans I_2, on écrit $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$. D'où $I_1 + I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x = 1$.

Avec $t = 1 + 2\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\cos x\,\mathrm{d}x$, on obtient : $I_1 = \displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{2t} = \frac{1}{2}\ln 3$. Enfin, $I_2 = 1 - I_1$.

Question 250

On note $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)\mathrm{d}x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] En écrivant $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, on obtient : $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sin(2x)}$.
- ☐ [Faux] Le changement de variable $t = \cos(2x)$ donne $I = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2}$.
- ☐ [Vrai] $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $\dfrac{2}{1-t^2} = \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t}$ et $\displaystyle\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + k$, $k \in \mathbb{R}$.

☐ [Faux] $I=\ln 3$.

Explications: Avec $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, on obtient : $I=\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{2\,\mathrm{d}x}{\sin(2x)}$. On écrit $I=\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{2\sin(2x)\,\mathrm{d}x}{\sin^2(2x)}$. Posons, $t=\cos(2x)$, on obtient : $\mathrm{d}t=-2\sin(2x)\,\mathrm{d}x$, $t(\pi/6)=1/2$, $t(\pi/4)=0$ et

$$I=\int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{1/2}=\frac{1}{2}\ln 3.$$

Question 251

On pose $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$, $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ et $K=\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Faux] Une intégration par parties donne : $K=\dfrac{1}{2}$.

☐ [Vrai] $I+J=\dfrac{\pi^2}{8}$ et $I-J=K$.

☐ [Faux] $I=\dfrac{\pi^2+4}{16}$.

☐ [Faux] $J=\dfrac{\pi^2-4}{16}$.

Explications: Une intégration par parties, avec $u=x$ et $v=1/2\sin(2x)$, donne

$$K=\left[\frac{x}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}.$$

A l'aide des relations $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ et $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x)$, on obtient :

$$I+J=\int_0^{\pi/2}x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}\text{ et }I-J=K=-\frac{1}{2}.$$

La somme et la différence de ces égalités donnent : $I=\dfrac{\pi^2-4}{16}$ et $J=\dfrac{\pi^2+4}{16}$.

Question 252

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Faux] Le changement de variable $t=\sin x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$.

☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\ln\sqrt{3}$.

- ☐ [Faux] Le changement de variable $t=\cos x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{\cos x}=\int_1^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{\cos x}=1$.

Explications: Avec $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$, on a : $t(0)=0$, $t(\pi/6)=1/2$ et

$$\int_0^{\pi/6}\frac{\mathrm{d}\,x}{\cos x}=\int_0^{\pi/6}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int_0^{\pi/6}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x}=\int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

Or, $\displaystyle\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)$. Donc $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\left[\ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right]_0^{1/2}=\ln\sqrt{3}$.
Avec $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$, on a : $t(0)=1$, $t(\pi/3)=1/2$ et

$$\int_0^{\pi/3}\frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{\cos x}=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=-\int_1^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=1.$$

Question 253
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t=\sin x$ donne $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x\cos x}=\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}\,t}{t(1-t^2)}$.
- ☐ [Faux] $\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, $\displaystyle\frac{1}{t(1-t^2)}=\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}$.
- ☐ [Faux] Une primitive de $\displaystyle\frac{1}{t(1-t^2)}$ sur $]0,1[$ est $F(t)=\ln\dfrac{t}{1-t^2}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x\cos x}=\ln\sqrt{3}$.

Explications: Avec $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$, on a : $t(\pi/6)=1/2$, $t(\pi/4)=1/\sqrt{2}$ et

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x\cos x}=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x\cos^2 x}=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x(1-\sin^2 x)}=\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}\,t}{t(1-t^2)}.$$

Or, $\displaystyle\frac{1}{t(1-t^2)}=\frac{1}{t}+\frac{1}{2-2t}-\frac{1}{2+2t}$. Donc

$$\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}\,t}{t(1-t^2)}=\left[\ln\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right]_{1/2}^{1/\sqrt{2}}=\ln\sqrt{3}.$$

Question 254
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Vrai] Le changement de variable $t = \cos x$ donne

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos x)} = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)(1+t)^2}.$$

☐ [Vrai] $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $\dfrac{4}{(1-t)(1+t)^2} = \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{2}{(1+t)^2}$.

☐ [Faux] Une primitive de $\dfrac{1}{(1-t)(1+t)^2}$ sur $]-1,1[$ est $\ln \dfrac{1+t}{1-t} - \dfrac{2}{1+t}$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos x)} = \ln 3 + \frac{2}{3}$.

Explications: Avec $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$, on a : $t(\pi/3) = 1/2$, $t(\pi/2) = 0$ et

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x(1+\cos x)} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x(1+\cos x)} = \int_{1/2}^{0} \frac{-\mathrm{d}\,t}{(1-t^2)(1+t)}.$$

Or, $\dfrac{4}{(1-t)(1+t)^2} = \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{2}{(1+t)^2}$. Donc, en tenant compte de la linéarité,

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{1}{4}\left[\ln \frac{1+t}{1-t} - \frac{2}{1+t}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{4}\left(\ln 3 + \frac{2}{3}\right).$$

Question 255

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Vrai] La dérivée de $\tan x$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ est $1 + \tan^2 x$.

☐ [Faux] Le changement de variable $t = \tan x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{1+2\cos^2 x} = \int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2}$.

☐ [Faux] Une primitive de $\dfrac{1}{3+t^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{1}{3}\arctan\left(\dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)$.

☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{1+2\cos^2 x} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$.

Explications: Avec $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x$, on a : $t(0) = 0$, $t(\pi/3) = \sqrt{3}$ et

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{1+2\cos^2 x} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

Question 256

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Faux] Le changement de variable $t = \cos x$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\tan x \, dx}{1+\cos^2 x} = \int_1^{1/2} \frac{dt}{t(1+t^2)}$.

☐ [Vrai] $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{t(1+t^2)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{1+t^2}$.

☐ [Vrai] Une primitive de $\dfrac{1}{t(1+t^2)}$ sur $]0,+\infty[$ est $\ln\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\tan x \, dx}{1+\cos^2 x} = \frac{1+\ln 5}{2}$.

Explications: Avec $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$, on a : $t(0) = 1$, $t(\pi/3) = 1/2$ et

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\tan x \, dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x \, dx}{\cos(1+\cos^2 x)} = -\int_1^{1/2} \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

Or, $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{t(1+t^2)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \ln \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + k$. Donc

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\tan x \, dx}{1+\cos^2 x} = \left[\ln \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right]_{1/2}^{1} = \frac{\ln 5 - \ln 2}{2}.$$

Question 257

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Vrai] Le changement de variable $t = \sqrt{x+1}$ donne $\displaystyle\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int_2^3 \frac{2dt}{t^2-1}$.

☐ [Vrai] $\displaystyle\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \ln \frac{3}{2}$.

☐ [Faux] Le changement de variable $t = \sqrt{x+1}$ donne $\displaystyle\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx = \int_2^3 \frac{t^2 \, dt}{t^2-1}$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

Explications: Avec $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1$, on a : $dx = 2t \, dt$, on a : $t(3) = 2$, $t(8) = 3$ et

$$\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int_2^3 \frac{2dt}{t^2-1} = \left[\ln \frac{t-1}{t+1}\right]_2^3 = \ln \frac{3}{2}.$$

De même, $\displaystyle\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx = \int_2^3 \frac{2t^2 \, dt}{t^2-1}$. Or $\dfrac{2t^2}{t^2-1} = 2 + \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}$, donc

$$\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx = \left[2t + \ln \frac{t-1}{t+1}\right]_2^3 = 2 + \ln \frac{3}{2}.$$

Question 258
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t=\sqrt{x}$ donne $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+1)\sqrt{x}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2\mathrm{d}\,t}{t^2+1}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+1)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{6}$.
- ☐ [Faux] Le changement de variable $t=\sqrt{x}$ donne $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x = \sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$.

Explications: Avec $t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2$, on a : $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, $t(1)=1$, $t(3)=\sqrt{3}$ et

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+1)\sqrt{x}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2\mathrm{d}\,t}{t^2+1} = \Big[2\arctan t\Big]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

De même, $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$. Or $\displaystyle\frac{2t^2}{t^2+1} = 2-\frac{2}{t^2+1}$, donc

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x = \Big[2t-2\arctan t\Big]_1^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}-2-\frac{\pi}{6}.$$

Question 259
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\displaystyle\frac{2t}{t^2+2t+1} = \frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\ln(t+1)+\frac{1}{t+1}$ est une primitive de $\displaystyle\frac{2t}{t^2+2t+1}$ sur $]-1,+\infty[$.
- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t=\sqrt{x}$ donne $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x+2\sqrt{x}+1} = \int_0^1 \frac{2t\mathrm{d}\,t}{t^2+2t+1}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x+2\sqrt{x}+1} = 2\ln 2-1$.

Explications: Avec $t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2$, on a : $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, $t(0)=0$, $t(1)=1$ et

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x+1+2\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2t\mathrm{d}\,t}{t^2+2t+1} = \left[2\ln(t+1)+\frac{2}{t+1}\right]_0^1 = 2\ln 2-1.$$

Question 260
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Vrai] $\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{2t}{t^2+t+1} = \dfrac{2t+1}{t^2+t+1} - \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$.

☐ [Vrai] $\ln(t^2+t+1) - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$ est une primitive de $\dfrac{2t}{t^2+t+1}$ sur $\mathbb{R}$.

☐ [Faux] Le changement de variable $t=\sqrt{x}$ donne $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}+1} = \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$.

☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Explications: D'abord, $\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{2t}{t^2+t+1} = \dfrac{2t+1}{t^2+t+1} - \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$. Donc, par linéarité,

$$\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \ln(t^2+t+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, avec $t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2$, on a : $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, $t(0)=0$, $t(1)=1$ et

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}+1} = \left[\ln(t^2+t+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \ln 3 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

7.4 Calculs d'intégrales | Niveau 4

Question 261

On pose $I = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x\cos^2 x\mathrm{d}x$, $J = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin^2 x\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x\cos(2x)\mathrm{d}x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Vrai] A l'aide de deux intégrations par parties successives, on obtient : $K = \mathrm{e}^\pi - 1 - 4K$ et donc $K = \dfrac{\mathrm{e}^\pi - 1}{5}$.

☐ [Faux] $I+J = \mathrm{e}^\pi$ et $I-J=K$.

☐ [Faux] $I = \dfrac{6\mathrm{e}^\pi - 1}{10}$.

☐ [Faux] $J = \dfrac{4\mathrm{e}^\pi + 1}{10}$.

Explications: Deux intégrations par parties successives, avec $u=\cos(2x)$ et $v=\mathrm{e}^x$ et ensuite avec $u=\sin(2x)$ et $v=\mathrm{e}^x$, donnent

$$K = \mathrm{e}^\pi - 1 + 2\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin(2x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^\pi - 1 - 4K \Rightarrow K = \frac{\mathrm{e}^\pi-1}{5}.$$

A l'aide des relations $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$, on obtient :

$$I+J = \mathrm{e}^\pi - 1 \text{ et } I-J=K \Rightarrow I = \frac{3(\mathrm{e}^\pi-1)}{5} \quad \text{et} \quad J = \frac{2(\mathrm{e}^\pi-1)}{5}.$$

Question 262

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t = \cos x$ donne $J = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.
- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t = \pi - x$ donne $I = \pi J - I$.
- ☐ [Faux] $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x.\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}J$.
- ☐ [Faux] $I = \dfrac{\pi^3}{4}$.

Explications: Avec $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$, on obtient :

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}.$$

Avec $t = \pi - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$ et puisque $\sin(\pi - t) = \sin t$, on obtient :

$$I = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t = \pi J - I.$$

On en déduit que : $I = \dfrac{\pi}{2}J = \dfrac{\pi^2}{4}$.

Question 263

Soit $f(x) = \dfrac{6x+8}{(x+3)(x^2-4)}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] La décomposition en éléments simples de f a la forme : $f(x) = \dfrac{a}{x+3} + \dfrac{b}{x^2-4}$.
- ☐ [Vrai] Une primitive de f sur $]-2,2[$ est donnée par $F(x) = \ln\dfrac{(4-x^2)}{(x+3)^2}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\ln\frac{3}{4}$.
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{(8+6\cos t)\sin t}{(3+\cos t)(\cos^2 t - 4)}\,\mathrm{d}t = 3\ln\frac{3}{4}$.

Explications: On vérifie que : $f(x) = \dfrac{-2}{x+3} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2}$. Donc, par linéarité,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{(x^2-4)}{(x+3)^2}\right| + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\ln\frac{3}{4}$. Avec $x = \cos t$, on a : $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$, $x(0) = 1$, $x(\pi/2) = 0$ et

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(8+6\cos t)\sin t}{(3+\cos t)(\cos^2 t - 4)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{6x+8}{(x+3)(x^2-4)}\,\mathrm{d}x = 3\ln\frac{3}{4}.$$

Question 264
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t = \cos x$ donne

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos^2 x)} = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)(1+t^2)}.$$

- ☐ [Vrai] $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $\dfrac{4}{(1-t^2)(1+t^2)} = \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{2}{1+t^2}$.
- ☐ [Faux] Une primitive de $\dfrac{1}{(1-t^2)(1+t^2)}$ sur $]-1,1[$ est $\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right) + 2\arctan t$.
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos^2 x)} = \ln 3 + 2\arctan\frac{1}{2}$.

Explications: Avec $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$, on a : $t(\pi/3) = 1/2$, $t(\pi/2) = 0$ et

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos^2 x)} = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)} = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)(1+t^2)}.$$

Or, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $\dfrac{4}{(1-t^2)(1+t^2)} = \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{2}{1+t^2}$. Donc

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos^2 x)} = \left[\frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{1-t} + \frac{1}{2}\arctan t\right]_0^{1/2} = \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}.$$

Question 265
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{(4+x^2)^2}$. On pose $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] On a : $\dfrac{2}{8^2} \leqslant I$ et $I > \dfrac{2}{4^2}$.
- ☐ [Faux] Le changement de variable $x = 2t$ donne $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.
- ☐ [Vrai] $I = \dfrac{1}{16}\left(\left[\dfrac{t}{1+t^2}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)$.
- ☐ [Vrai] $I = \dfrac{2+\pi}{64}$.

Explications: Pour tout $x \in [0,2]$, on a : $\dfrac{1}{8^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{4^2}$. Donc $\dfrac{2}{8^2} \leqslant I \leqslant \dfrac{2}{4^2}$.
Le changement de variable $x = 2t$ donne $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2\mathrm{d}t}{(4+4t^2)^2} = \frac{2}{4^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.

En intégrant $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ par parties avec $u=\dfrac{1}{1+t^2}$ et $v=t$, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right) = \frac{2+\pi}{8} \Rightarrow I = \frac{2+\pi}{64}.$$

Question 266

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ donne :

$$\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}.$$

- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\pi}{6}.$
- ☐ [Vrai] $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t^2\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}.$
- ☐ [Faux] $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$

Explications: Avec $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, on a : $x=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$. D'où $\mathrm{d}x = \dfrac{4t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$ et

$$\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}.$$

Une intégration par parties avec $u=\dfrac{1}{t^2+1}$ et $v=t$ donne

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t^2\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} - 2\left[\frac{t}{1+t^2}\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$

Question 267

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$ et $I_n=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\left(\ln^2 x+1\right)^n}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $F_n(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\displaystyle\int_0^x \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{n+1}}.$

- ☐ [Faux] $F_1(x) = \arctan x$ et $F_2(x) = (\arctan x)^2$.
- ☐ [Vrai] Le changement de variable $t = \ln x$ donne $I_n = F_n(1)$.
- ☐ [Faux] $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$ et $I_2 = \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2$.

Explications: Une intégration par parties, avec $u = (t^2+1)^{-n}$ et $v = t$, donne

$$F_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}t.$$

En écrivant $t^2 = (t^2+1) - 1$, on obtient : $F_n(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^n} + 2nF_n(x) - 2nF_{n+1}(x)$. D'où

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\left[\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)F_n(x)\right].$$

En particulier, $F_1(x) = \arctan x$ et $F_2(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x}{x^2+1} + \arctan x\right]$. Le changement de variable $t = \ln x$ donne $I_n = F_n(1)$. On en déduit que $I_1 = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ et $I_2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi}{8}$

Développements limités

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

8 Développements limités

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction. On dit que $f(x)$ est un $o\left((x-a)^n\right)$ au voisinage de a et on écrit $f(x) = o((x-a)^n)$ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$. On note par $DL_n(a)f(x)$ le développement limité de f à l'ordre n en a. On note aussi $DL_n(a^+)f(x)$ (resp. $DL_n(a^-)f(x)$) le développement limité de f à l'ordre n à droite en a (resp. à gauche en a).

8.1 Opérations sur les DL | Niveau 1

Question 268

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0 telle que $f(0) = 0$ et $DL_4(0)f(x) = x + x^2 + o(x^4)$. On peut en déduire que :

- ☐ [Vrai] f est continue en 0, dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
- ☐ [Faux] Si f est 2 fois dérivable en 0 alors $f^{(2)}(0) = 1$.
- ☐ [Faux] $DL_4(0)f(2x) = 2x + 2x^2 + o(x^4)$.
- ☐ [Vrai] $DL_4(0)f(x^2) = x^2 + x^4 + o(x^4)$.

Explications: On a : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Donc f est continue en 0. L'existence du DL à l'ordre 1 en 0 implique que f est dérivable en 0 et si f est 2 fois dérivable en 0 alors $f^{(2)}(0) = 2$. Enfin, $DL_2(0) f(2x) = 2x + 4x^2 + o(x^4)$ et

$$DL_8(0) f(x^2) = x^2 + x^4 + o(x^8) \Rightarrow DL_4(0) f(x^2) = x^2 + x^4 + o(x^4).$$

Question 269

Soient f et g deux fonctions telles que :

$$DL_3(0) f(x) = x + x^3 + o(x^3) \text{ et } DL_3(0) g(x) = -x + x^3 + o(x^3).$$

On peut en déduire que :

- ☐ [Vrai] $DL_2(0)[f(x) + g(x)] = o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(0)[f(x) - g(x)] = o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] $DL_2(0)[2f(x) + g(x)] = x + o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_6(0) f(x) \times g(x) = -x^2 + x^6 + o(x^6)$.

Explications: Découle des opérations sur les DL en remarquant que la somme ou le produit de deux DL du même ordre donne un DL du même ordre.

Question 270

Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_3(0) \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$.
- ☐ [Faux] $DL_3(0) \dfrac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$.
- ☐ [Faux] $DL_3(0) \dfrac{x}{1-x} = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$.
- ☐ [Vrai] $DL_3(0) \dfrac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)$.

Explications: On a le DL usuel suivant : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$. On en déduit que

$$\frac{x}{1-x} = x(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) = x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

et

$$\frac{1+x}{1-x} = (1+x)(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3).$$

Question 271

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_3(0)\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.
- ☐ [Faux] $DL_3(0)\mathrm{e}^x = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.
- ☐ [Faux] $DL_3(0)(\sin x + \mathrm{e}^x) = 2x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.
- ☐ [Vrai] $DL_3(0)(\sin x\mathrm{e}^x) = x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Explications: On a : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$. Donc

$$DL_3(0)(\mathrm{e}^x + \sin x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \text{et} \quad DL_3(0)(\sin x\mathrm{e}^x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Question 272

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_3(0)\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.
- ☐ [Faux] $DL_3(0)\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
- ☐ [Faux] $DL_3(0)(\cos x + \mathrm{e}^x) = 2 + x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
- ☐ [Vrai] $DL_3(0)(\cos x\mathrm{e}^x) = 1 + x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Explications: On a : $DL_3(0)\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ et $DL_3(0)\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$. Donc $DL_3(0)(\cos x + \mathrm{e}^x) = 2 + x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $DL_3(0)\cos x\mathrm{e}^x = 1 + x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

8.2 Opérations sur les DL | Niveau 2

Question 273

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $DL_3(0)\sin(2x) = 2x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
- ☐ [Vrai] $DL_2(0)\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] $DL_2(0)\cos(\sin x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_3(0)\cos(x - x^2) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.

Explications: Le $DL_3(0)\sin(t)$, avec $t = 2x$, donne : $DL_3(0)\sin(2x) = 2x - \dfrac{4x^3}{3} + o(x^3)$.

Ensuite $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. Enfin, en posant $t=\sin x$ et puis $t=x-x^2$ dans le $DL_3(0)\cos(t)$, on obtient :

$$DL_2(0)\cos(\sin x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \;\text{ et }\; DL_3(0)\cos(x-x^2)=1-\frac{x^2}{2}+x^3+o(x^3).$$

Question 274
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $DL_1(0)\sqrt{2+x}=1+\frac{1+x}{2}+o(1+x)$.
- ☐ [Faux] $DL_1(0)\sqrt{4+x}=2+\frac{x}{2}+o(x)$.
- ☐ [Vrai] $DL_1(0)\sqrt{1+2x}=1+x+o(x)$.
- ☐ [Vrai] $DL_2(0)\sqrt[3]{1-3x}=1-x-x^2+o(x^2)$.

Explications: D'abord, $\sqrt{2+x}=\sqrt{2}\times\sqrt{1+\frac{x}{2}}$ et $\sqrt{4+x}=\sqrt{4}\times\sqrt{1+\frac{x}{4}}$. Ensuite, on applique le développement $DL_1(0)\sqrt{1+t}=1+\frac{t}{2}+o(t)$ avec $t=\frac{x}{2}$, $t=\frac{x}{4}$ et $t=2x$. Enfin, on applique le développement $DL_2(0)(1+t)^\alpha$ avec $\alpha=\frac{1}{3}$ et $t=-3x$.

Question 275
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $DL_1(0)(8+3x)^{2/3}=4+2x+o(x)$.
- ☐ [Vrai] $DL_1(0)1/\sqrt{1-2x}=1+x+o(x)$.
- ☐ [Vrai] $DL_3(0)\sqrt[3]{1+3x^3}=1+x^3+o(x^3)$.
- ☐ [Faux] $DL_1(0)\sqrt[3]{3+x}=1+\frac{x}{3}+o(x)$.

Explications: On a :

$$(8+3x)^{2/3}=8^{2/3}\left(1+\frac{3x}{8}\right)^{2/3}=4\left(1+\frac{2}{3}.\frac{3x}{8}+o(x)\right)=4+x+o(x)$$

et

$$\sqrt[3]{3+x}=\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}=\sqrt[3]{3}\left(1+\frac{1}{3}.\frac{x}{3}+o(x)\right)=\sqrt[3]{3}+\frac{\sqrt[3]{3}}{9}x+o(x).$$

Enfin, applique le $DL_1(0)(1+t)^\alpha$ avec $\alpha=-\frac{1}{2}$ et $t=-2x$, ensuite avec $\alpha=\frac{1}{3}$ et $t=3x^3$.

Question 276
Les égalités suivantes portent sur des développements limités en 0. Cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\ln(1+2x) = 2\left(x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$.
- ☐ [Vrai] $\ln(1-2x) = -2x - 2x^2 + o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] $\ln(1+x^2) = x^2 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$.
- ☐ [Faux] $\ln(1-x^2) = -\left[x^2 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)\right]$.

Explications: On applique le développement : $DL_2(0)\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ avec $t = 2x$, $t = -2x$, $t = x^2$ et enfin avec $t = -x^2$.

Question 277

Les égalités suivantes portent sur des développements limités en 0. Cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\ln(1+\mathrm{e}^x) = 1 + x + o(x)$.
- ☐ [Vrai] $\ln(\cos x) = -x^2/2 + o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $\ln(1+\sin x) = x + o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $\ln(1-x^2) - \ln\big((1+x)^2\big) = o(x)$.

Explications: On a :

$$\ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln(2 + x + o(x)) = \ln 2 + \frac{x}{2} + o(x)$$

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\ln(1+\sin x) = \ln\big(1 + x + o(x^2)\big) = x - x^2/2 + o(x^2)$$

et enfin

$$\ln(1-x^2) - \ln\big((1+x)^2\big) = \ln(1-x^2) - \ln\big(1 + 2x + x^2\big) = -2x + o(x).$$

Question 278

On rappelle que $\tan x = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_3(0)\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.
- ☐ [Faux] $DL_3(0)\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.
- ☐ [Vrai] $DL_3(0)\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

☐ [Faux] $DL_3(0)\tan(x) = x - \dfrac{2x^3}{3} + o(x^3)$.

Explications: On utilise $DL_3(0)\dfrac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+o(t^2)$ avec $t = \cos(x)-1 = \dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$. On obtient : $DL_3(0)\dfrac{1}{\cos(x)} = 1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$. Ensuite, on effectue le produit $\sin(x)\times\dfrac{1}{\cos(x)}$:

$$DL_3(0)\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Question 279

Soit $f(x) = \arcsin(x)$ et $g(x) = \arctan(x)$. Alors

☐ [Vrai] $DL_2(0)f'(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

☐ [Faux] $DL_2(0)g'(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$.

☐ [Vrai] $DL_3(0)f(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

☐ [Faux] $DL_3(0)g(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Explications: On a : $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2} = 1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ et $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = 1-x^2+o(x^2)$. Par intégration, et puisque $\arcsin(0) = 0$ et $\arctan(0) = 0$, on obtient :

$$DL_3(0)f(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad DL_3(0)g(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

8.3 Opérations sur les DL | Niveau 3

Question 280

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Faux] Pour obtenir le $DL_2(0)\sqrt{2+t}$, on écrit :

$$\sqrt{2+t} = \sqrt{1+(1+t)} = 1 + \frac{(1+t)}{2} - \frac{(1+t)^2}{8} + o((1+t)^2).$$

☐ [Faux] Pour obtenir le $DL_2(2)\sqrt{x}$, on écrit :

$$\sqrt{x} = \sqrt{1+(x-1)} = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + o((x-1)^2).$$

☐ [Vrai] $DL_2(0)\dfrac{\ln(1+t)}{1+t} = t - \dfrac{3t^2}{2} + o(t^2)$.

☐ [Vrai] $DL_2(1)\dfrac{\ln x}{x} = (x-1) - \dfrac{3(x-1)^2}{2} + o((x-2)^2)$.

Explications: Pour obtenir le $DL_2(0)\sqrt{2+t}$, on écrit :

$$\sqrt{2+t} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{t}{2}} = \sqrt{2}\left(1+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{32}+o(t^2)\right).$$

Pour obtenir le $DL_2(2)\sqrt{x}$, on pose $t = x-2$. D'où

$$\sqrt{x} = \sqrt{2+t} = \sqrt{2}\left[1+\frac{(x-2)}{4}-\frac{(x-2)^2}{32}\right]+o((x-2)^2).$$

On a : $\dfrac{\ln(1+t)}{1+t} = \left(t-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\big(1-t+t^2+o(t^2)\big) = t-\dfrac{3t^2}{2}+o(t^2)$. Enfin, en posant $t = x-1$, on obtient :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(1+t)}{1+t} = t-\frac{3t^2}{2}+o(t^2) = (x-1)-\frac{3(x-1)^2}{2}+o((x-1)^2).$$

Question 281

Les égalités suivantes portent sur des développements limités au voisinage de $+\infty$. Cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_3(+\infty)\sin\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{6x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(+\infty)\dfrac{1}{1+x^2} = 1-\dfrac{1}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- ☐ [Vrai] $DL_2(+\infty)\ln\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(+\infty)\dfrac{1}{1+x} = 1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Explications: Pour écrire un $DL(+\infty)$ de $f(x)$, on écrit un $DL(0^+)$ de $g(t) = f(1/t)$. Ainsi

$$\sin(t) = t-\frac{t^3}{6}+o(t^3) \Rightarrow DL_3(+\infty)\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

$$\frac{1}{1+1/t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} = t^2+o(t^2) \Rightarrow DL_2(+\infty)\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

$$\ln\left(\frac{1/t+1}{1/t}\right) = \ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+o(t^2) \Rightarrow DL_2(+\infty)\ln\frac{x+1}{x} = \frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

$$\frac{1}{1+1/t} = \frac{t}{1+t} = t-t^2+o(t^2) \Rightarrow DL_2(+\infty)\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Question 282

Les égalités suivantes portent sur des développements limités au voisinage de $+\infty$. Cocher celles qui sont vraies :

☐ [Vrai] $\sin\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

☐ [Faux] $\cos\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = 1 - \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

☐ [Vrai] $\dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

☐ [Faux] $\ln\left(1 + \dfrac{x}{x^2-1}\right) = \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Explications: Pour écrire un $DL(+\infty)$ de $f(x)$, on écrit un $DL(0^+)$ de $g(t) = f(1/t)$. Or

$$\sin\left(\frac{1}{1+1/t}\right) = \sin\left(\frac{t}{1+t}\right) = \sin\big(t - t^2 + o(t^2)\big) = t - t^2 + o(t^2)$$

$$\cos\left(\frac{1}{1+1/t}\right) = \cos\left(\frac{t}{1+t}\right) = \cos\big(t - t^2 + t^3 + o(t^3)\big) = 1 - \frac{t^2}{2} + t^3 + o(t^3),$$

$$\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}-1} = \frac{t}{1-t^2} = t + t^3 + o(t^3) \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{t}{1-t^2}\right) = \ln\big(1 + t + o(t^2)\big) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Donc

$$\sin\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \cos\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad \ln\left(1 + \frac{x}{x^2-1}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Question 283

Soit $f(x) = \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{\sqrt{1+2x}-1}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Vrai] $DL_2(0)\ln(1+x+x^2) = x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

☐ [Vrai] $DL_2(0)\big(\sqrt{1+2x}-1\big) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

☐ [Faux] $DL_2(0)f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

☐ [Faux] $DL_3(0)[xf(x)] = x + x^2 + \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$.

Explications: Pour écrire le $DL_2(0)f(x)$, il faut écrire les développements limités du numérateur et du dénominateur à l'ordre 3 en 0. Ensuite effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2. On aura :

$$DL_2(0)f(x) = 1 + x - \frac{2x^2}{3} + o(x^2).$$

En multipliant par x, on obtient : $DL_3(0)xf(x) = x + x^2 - \dfrac{2x^3}{3} + o(x^3)$.

Question 284
Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_2(0)f(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(0)g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(0)[f(x)+g(x)] = 2 - x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] $DL_2(0)\dfrac{f(x)}{g(x)} = 2 - 2x + \dfrac{3x^2}{2} + o(x^2)$.

Explications: Le $DL_2(0)\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2)$ avec $t = \sin x = x + o(x^2)$ donne :

$$DL_2(0)f(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2).$$

Ensuite, on transforme $g(x)$: $g(x) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1+\frac{\cos x - 1}{2}}$. Ainsi, avec $t = \dfrac{\cos x - 1}{2} = -\dfrac{x^2}{4} + o(x^2)$, on obtient : $g(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$. On en déduit que

$$f(x) + g(x) = \frac{3}{2} - x + \frac{9x^2}{8} + o(x^2) \text{ et } \frac{f(x)}{g(x)} = 2 - 2x + \frac{3x^2}{2} + o(x^2).$$

Question 285
Soit $f(x) = \ln[1 + \sin x]$ et $g(x) = \ln[1 + \cos x]$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_2(0)f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(0)g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(0)[f(x)+g(x)] = 1 + x - x^2 + o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] $DL_2(0)f(x)g(x) = \ln(2)x - \dfrac{\ln(2)}{2}x^2 + o(x^2)$.

Explications: Le $DL_2(0)\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ avec $t = \sin x = x + o(x^2)$ donne :

$$DL_2(0)f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2.$$

Ensuite, on transforme $g(x)$: $g(x) = \ln\left[2\left(1 + \dfrac{\cos x - 1}{2}\right)\right] = \ln(2) + \ln\left(1 + \dfrac{\cos x - 1}{2}\right)$.
Ainsi, avec $t = \dfrac{\cos x - 1}{2} = -\dfrac{x^2}{4} + o(x^2)$, on obtient : $g(x) = \ln(2) - \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)$.

Question 286
Soit $f(x) = \arctan x$. Pour $t \neq 0$, on pose $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Pour $t > 0$, on a : $g(t) = \frac{\pi}{2} + \arctan(t)$.
- ☐ [Vrai] Pour tout $x > 0$, $g'(t) = \frac{-1}{1+t^2}$.
- ☐ [Faux] $DL_3(0^+)g(t) = -t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$.
- ☐ [Vrai] $DL_3(+\infty)f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

Explications: Pour $t > 0$, on a : $g(t) = \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$. Donc

$$g'(t) = -\frac{1}{1+t^2} = -1 + t^2 + o(t^2)$$

et, par intégration, $DL_3(0^+)g(t) = \frac{\pi}{2} - t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ car $\arctan 0 = 0$. Ainsi

$$DL_3(+\infty)f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Question 287
Soit $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_3(0)f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.
- ☐ [Faux] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(0)g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)' = 1 + x + o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] $DL_2(0)g(x) = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}x^2}{2} + o(x^2)$.

Explications: Avec $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$, on obtient

$$DL_3(0)f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Or $g(x) = \mathrm{e}.\mathrm{e}^{\cos x - 1}$. Donc, avec $u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^3)$, on obtient : $DL_2(0)g(x) = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}.x^2}{2} + o(x^2)$.

Question 288
Soit $f(x) = \ln\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $DL_2(0)(\mathrm{e}^x-1)=x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ et $DL_2(0)\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}=1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] $DL_2(0)\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(0)f(x)=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}+o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] $DL_1(0)f(x)=-\dfrac{x}{2}+o(x)$.

Explications: On a : $DL_2(0)(\mathrm{e}^x-1)=x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ et donc

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\frac{1}{1+\frac{x}{2}+o(x)}=1-\frac{x}{2}+o(x).$$

Pour écrire le $DL_2(0)\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$, il faut considérer le $DL_3(0)(\mathrm{e}^x-1)$. Maintenant, avec $u=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}-1=-\dfrac{x}{2}+o(x)$, on obtient

$$\ln\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\ln(1+u)=u+o(u)=-\frac{x}{2}+o(x).$$

Question 289

Soit $f(x)=(1+x)^{1/x}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_2(0)\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(0)\mathrm{e}^{1+u}=1+u+\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(0)f(x)=\dfrac{5}{2}-2x+\dfrac{3x^2}{2}+o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] $DL_2(0)f(x)=\mathrm{e}-\dfrac{\mathrm{e}}{2}x+\dfrac{11\mathrm{e}}{24}x^2+o(x^2)$.

Explications: Le $DL_3(0)\ln(1+x)$ donne : $DL_2(0)\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)$.
Ensuite, $\mathrm{e}^{1+u}=\mathrm{e}.\mathrm{e}^u=\mathrm{e}.\left(1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)\right)$. Ainsi, avec $u=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)$, on obtient :

$$f(x)=\mathrm{e}^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}=\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}x+\frac{11\mathrm{e}}{24}x^2+o(x^2).$$

Question 290

Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $DL_2(0)\dfrac{\ln(1+x)}{x-x^2}=1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.

☐ [Faux] $DL_2(0)\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)} = 1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.

☐ [Vrai] $DL_4(0)\ln(1+x\sin x) = x^2 - \dfrac{2x^4}{3}+o(x^4)$.

☐ [Vrai] $DL_4(0)\arcsin\big(\ln(1+x^2)\big) = x^2 - \dfrac{x^4}{2}+o(x^4)$.

Explications: Le division suivant les puissances croissances du $DL_3(0)\ln(1+x)$ par $x-x^2$ donne

$$DL_2(0)\frac{\ln(1+x)}{x-x^2} = 1+\frac{x}{2}+\frac{5x^2}{6}+o(x^2).$$

Le division suivant les puissances croissances du $DL_3(0)(e^x-1)$ par le $DL_3(0)\ln(1+x)$ donne

$$DL_2(0)\frac{e^x-1}{\ln(1+x)} = 1+x+\frac{x^2}{3}+o(x^2).$$

Ensuite, avec $u = x\sin x = x^2 - \dfrac{x^4}{6}+o(x^4)$ et $\ln(1+u) = u - u^2/2+o(u^2)$, on obtient :

$$DL_4(0)\ln(1+x\sin x) = x^2 - \frac{2x^4}{3}+o(x^4).$$

Enfin, avec $u = \ln(1+x^2) = x^2 - \dfrac{x^4}{2}+o(x^4)$ et $\arcsin u = u + \frac{u^3}{6}+o(u^4)$, on obtient :

$$DL_4(0)\arcsin\big(\ln(1+x^2)\big) = x^2 - \frac{x^4}{2}+o(x^4).$$

Question 291

Soit $f(x) = \arctan(1+x)$ et $g(x) = \arctan(\cos x)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

☐ [Vrai] $DL_2(0)f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+o(x^2)$.

☐ [Faux] $DL_3(0)f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{12}+o(x^3)$.

☐ [Vrai] $DL_3(0)\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ et $DL_3(0)\arctan u = u - \dfrac{u^3}{3}+o(u^3)$.

☐ [Faux] $DL_3(0)g(x) = \left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right) - \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^3+o(x^3)$.

Explications: On a : $f'(x) = \dfrac{1}{1+(1+x)^2} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+o(x^2)$. Ce qui par intégration, puisque $f(0) = \pi/4$, donne

$$DL_3(0)f(x) = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3).$$

Ensuite, avec $u = \cos x - 1 = -\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$, on aura :

$$g(x) = \arctan(1+u) = \frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{4}+o(u^2) = \frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{4}+o(x^3).$$

8.4 Opérations sur les DL | Niveau 4

Question 292

Soit $f(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t$ et $g(x)=\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$. Alors

- ☐ [Vrai] $DL_2(0)g(x)=x-x^2+o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $f'(x)$ ne possède pas de $DL(0)$.
- ☐ [Faux] $f(x)$ ne possède pas de $DL(0)$.
- ☐ [Vrai] $DL_3(0)f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$.

Explications: On a : $f'(x)=g(x)$ et $DL_2(0)g(x)=x-x^2+o(x^2)$. Par intégration, et puisque $f(0)=0$, on obtient :

$$DL_3(0)f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Question 293

Soit $f(x)=(1+x)^{1/(\mathrm{e}^x-1)}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_2(0)\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ et $DL_2(0)(\mathrm{e}^x-1)=x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(0)\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1}=1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(0)f(x)=\mathrm{e}.\mathrm{e}^{-x+x^2/2+o(x^2)}=\mathrm{e}-\mathrm{e}.x+\mathrm{e}.x^2+o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] $DL_2(0)f(x)=\mathrm{e}-\mathrm{e}.x+\frac{7\mathrm{e}}{6}x^2+o(x^2)$.

Explications: On a : $f(x)=\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1}\right)$. Donc, pour écrire le $DL_2(0)f(x)$, on utilise le $DL_3(0)\ln(1+x)$ et le $DL_3(0)(\mathrm{e}^x-1)$. La division suivants les puissances croissantes donne

$$DL_2(0)\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1}=1-x+\frac{2x^2}{3}+o(x^2).$$

Ensuite, avec $\mathrm{e}^{1+u}=\mathrm{e}.\mathrm{e}^u=\mathrm{e}.\left(1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)\right)$ où $u=-x+\frac{2x^2}{3}+o(x^2)$, on obtient :

$$f(x)=\mathrm{e}-\mathrm{e}.x+\frac{7\mathrm{e}}{6}x^2+o(x^2).$$

Question 294

Soit $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}$. On considère la fonction g définie par $g(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Pour $0 < t < 1$, $g(t) = \dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t^2}}{t}$ et $DL_2(0^+)g(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3t}{8} + o(t^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(+\infty)f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- ☐ [Vrai] $DL_2(+\infty)f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x} + \dfrac{1}{16x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(-\infty)f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8x} + \dfrac{1}{16x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Explications: On a : $g(t) = \sqrt{\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}} - \sqrt{\dfrac{1}{t^2}-1} = \dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t^2}}{|t|}$. Donc, pour $0 < t < 1$,

$$g(t) = \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t^2}}{t} \Rightarrow DL_2(0^+)g(t) = \frac{1}{2} + \frac{3t}{8} + \frac{t^2}{16} + o(t^2).$$

Ainsi : $DL_2(+\infty)f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x} + \dfrac{1}{16x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Pour $-1 < t < 0$,

$$g(t) = \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t^2}}{-t} \Rightarrow DL_2(0^-)g(t) = -\frac{1}{2} - \frac{3t}{8} - \frac{t^2}{16} + o(t^2).$$

D'où, $DL_2(-\infty)f(x) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8x} - \dfrac{1}{16x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Question 295

Soit $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. On considère la fonction g définie par $g(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Pour $0 < t$, $g(t) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(1+t)$ et $DL_1(0)g'(t) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{t}{2} + o(t)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(0^+)g(t) = -\dfrac{t}{2} + \dfrac{t^2}{4} + o(t^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(+\infty)f(x) = -\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- ☐ [Vrai] $DL_2(+\infty)f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Explications: Pour $0 < t$, on a : $g(t) = \arctan\left(\dfrac{1}{1+t}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(1+t)$ et

$$g'(t) = \frac{-1}{1+(1+t)^2} = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{1+(t+t^2/2)} = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2} + o(t).$$

Par intégration, et puisque $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$, on obtient :

$$DL_2(0^+)g(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + o(t^2) \Rightarrow DL_2(+\infty)f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Question 296

Soient f et g telles que $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ et $g(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $g(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{t-t^2}$.
- ☐ [Faux] $DL_2(0)g(t) = 1 + \dfrac{t}{2} + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_2(0)(+\infty)f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- ☐ [Vrai] $DL_2(0)(+\infty)f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{6x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Explications: D'abord $g(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{t-t^2} = 1 + \dfrac{t}{2} + \dfrac{5t^2}{6} + o(t^2)$. Donc

$$DL_2(+\infty)f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

8.5 Applications des DL | Niveau 1

Question 297

Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{1+x}-1} = 2$.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)} = 1$.
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{2}$.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x - x}{x^2} = 2$.

Explications: On a : $DL_1(0)e^x - 1 = x + o(x)$ et $DL_1(0)(\sqrt{1+x}-1) = \dfrac{x}{2} + o(x)$. Donc

$$DL_0(0)\frac{e^x-1}{\sqrt{1+x}-1} = 2 + o(1) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sqrt{1+x}-1} = 2.$$

De même, $DL_1(0)(e^x - \sqrt{1+2x}) = o(x)$ et $DL_1(0)\ln(1+x) = x + o(x)$. Donc

$$DL_0(0)\frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)} = o(1) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)} = 0.$$

Ensuite, $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\sin^2 x = x^2 + o(x^2)$. D'où $\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{2} + o(1)$. On en déduit la limite en 0. Enfin,

$$e^x - \cos x - x = x^2 + o(x^2) \Rightarrow \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} = 1 + o(1) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x - x}{x^2} = 1.$$

Question 298
Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$ et $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{2x + x^2}$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_1(0)g(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} + o(x)$.
- ☐ [Faux] $f(1+x) = g(x)$ et $DL_1(1)f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} + o(x)$.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Explications: Les développements à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ donne :

$$DL_1(0)g(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + o(x) \Rightarrow DL_1(1)f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x-1}{2} + o(x-1)$$

car $f(x) = g(x-1)$. Enfin, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \dfrac{1}{2}$.

8.6 Applications des DL | Niveau 2

Question 299
Parmi les égalités suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = 1$.
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{3}$.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sin^2 x}$ n'existe pas.

Explications: On a : $(1+x)^{1/x} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$ et $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 + o(1)$. Donc

$$\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \mathrm{e} + o(1) \Rightarrow \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \mathrm{e}.$$

De même, $(\cos x)^{1/\sin^2 x} = \mathrm{e}^{\ln(\cos x)/\sin^2 x}$. Or $\sin^2 x = x^2 + o(x^2)$ et

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Donc

$$\frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2} + o(1) \Rightarrow \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x} = \mathrm{e}^{-1/2}.$$

Ensuite, $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$, et le $DL_4(0)\sin^2 x = x^2 - \dfrac{x^4}{3} + o(x^4)$ donne

$$DL_0(0)\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{1}{3} + o(1) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Enfin, $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$, $\sqrt{1-x^2}=1-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}+o(x^4)$ et $x^2\sin^2 x = x^4+o(x^4)$. Donc

$$\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sin^2 x}=\frac{x^4/6+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\frac{1}{6}+o(1)\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sin^2 x}=\frac{1}{6}.$$

Question 300

Soit f telle que $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x+x^2}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$. On note T_0 la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 lorsqu'elle existe. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $DL_2(0)f(x)=1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ et f est continue en 0.
- ☐ [Vrai] f est dérivable en 0 et $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.
- ☐ [Faux] T_0 est la droite d'équation $y=1-\dfrac{x}{2}$ et le graphe de f est en dessous de T_0 au voisinage de 0.

Explications: Pour écrire le $DL_2(0)f(x)$, on utilise le $DL_3(0)(\mathrm{e}^x-1)$. La division suivant les puissances croissantes donne :

$$DL_2(0)f(x)=1-\frac{x}{2}+\frac{2x^2}{3}+o(x^2).$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ et f est continue en 0 et, puisque f admet un $DL_1(0)$, f est dérivable en 0. De plus, T_0 est la droite d'équation $y=1-\dfrac{x}{2}$ et puisque $f(x)-y=\dfrac{2x^2}{3}+o(x^2)\geqslant 0$ au voisinage de 0 : le graphe de f est au dessus de T_0 au voisinage de 0.

Question 301

Soit $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x+2}$ et $g(x)=f(x-1)$. On note T la tangente au graphe de f au point d'abscisse -1. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_3(0)g(x)=1-2x+2x^3+o(x^3)$.
- ☐ [Faux] T est la droite d'équation $y=1-2x$ et le graphe de f est au dessus de T au voisinage de -1.
- ☐ [Faux] T est la droite d'équation $y=1-2x$ et le graphe de f est en dessous de T au voisinage de -1.
- ☐ [Faux] T est la droite d'équation $y=1-2x$ et le point d'abscisse -1 est un point d'inflexion.

Explications: D'abord $g(x) = \dfrac{1-2x+x^2}{1+x^2} = 1-2x+2x^3+o(x^3)$. On en déduit que

$$DL_3(-1)f(x) = 1-2(x+1)+2(x+1)^3+o\left((x+1)^3\right).$$

Donc T est la droite d'équation $y = 1-2(x+1)$ et le point d'abscisse -1 est un point d'inflexion.

Question 302

Soit $f(x) = x-\sin x$. On note T_0 la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_3(0)f(x) = \dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$.
- ☐ [Faux] T_0 est la droite d'équation $y = 0$ et f admet un extrémum en 0.
- ☐ [Vrai] Le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$ n'existe pas.

Explications: Le $DL_3(0)\sin x$ donne $DL_3(0)f(x) = \dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$. Donc T_0 est la droite d'équation $y = 0$. Or, au voisinage de 0, on a :

$$f(x)-y = \frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

Ce qui implique que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion. Enfin,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{6}+o(x)\right) = 0.$$

Question 303

Soit $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$. On note Γ le graphe de f et on pose $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $DL_1(0)g(x) = 1+\dfrac{x}{2}+o(x)$.
- ☐ [Vrai] Au voisinage de $+\infty$, on a : $f(x) = 1-\dfrac{1}{2x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
- ☐ [Vrai] Γ admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.
- ☐ [Faux] Γ admet la droite d'équation $y = -1$ comme asymptote au voisinage de $-\infty$.

Explications: D'abord, $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1-\dfrac{x}{2}+o(x)$. Donc, au voisinage de $\pm\infty$, on a :

$$f(x) = 1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ car } f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote au voisinage de $\pm\infty$.

Question 304
Soit $f(x)=x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. On note Γ le graphe de f et on pose $g(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $DL_2(0)g(x)=1-\frac{x}{2}+o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] Au voisinage de $+\infty$, on a : $f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$.
- ☐ [Vrai] Γ admet la droite d'équation $y=x-\frac{1}{2}$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.
- ☐ [Faux] Γ est au dessus de la droite d'équation $y=x-\frac{1}{2}$ au voisinage de $-\infty$.

Explications: D'abord, $g(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)$. Donc, au voisinage de $\pm\infty$, on a :

$$f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\text{ car }f(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote au voisinage de $\pm\infty$. De plus, au voisinage de $-\infty$, $f(x)-y=\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant 0$. Donc Γ est en dessous de cette droite au voisinage de $-\infty$.

8.7 Applications des DL | Niveau 3

Question 305
Soit $f(x)=\sqrt{2+x^2}$. On note Γ le graphe de f et on pose $g(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $DL_2(0)g(x)=1+x+x^2+o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] Au voisinage de $+\infty$, on a : $f(x)=x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$.
- ☐ [Vrai] Γ admet la droite d'équation $y=x$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.
- ☐ [Faux] Γ est en dessous de la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$.

Explications: D'abord, au voisinage de 0^+, on a : $g(x)=\sqrt{1+2x^2}=1+x^2+o(x^2)$ et donc, au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\text{ car }f(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation $y=x$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$. De plus, au voisinage de $+\infty$, $f(x)-y=\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\geqslant 0$. Donc Γ est au dessus de la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$.

Question 306
Soit $f(x)=\sqrt{1+2x}-1$ et $g(x)=\ln(1+x)$. On note T_0 la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_2(0)f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $DL_2(0)g(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ [Faux] T_0 est la droite d'équation $y = x$ et le graphe de f est au-dessus de T_0 au voisinage de 0.
- ☐ [Vrai] $DL_1(0)\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + o(x)$.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\ln(1+x)} = 0$.

Explications: Les développements à l'ordre 2 en 0 de $(1+t)^\alpha$ et de $\ln(1+x)$ donnent :

$$DL_2(0)f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad DL_2(0)g(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Donc T_0 est la droite d'équation $y = x$ et $f(x) - y = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \leqslant 0$ au voisinage de 0 : le graphe de f est en dessous de T_0 au voisinage de 0. À partir des $DL_2(0)$ de f et g, on obtient

$$DL_1(0)\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + o(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{\ln(1+x)} = 1.$$

Question 307

Soit f telle que $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x^2 + 2\sin x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. On note T_0 la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 lorsqu'elle existe. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $DL_2(0)f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et f est continue en 0.
- ☐ [Vrai] f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
- ☐ [Faux] T_0 est la droite d'équation $y = 1 + \dfrac{x}{2}$ et le graphe de f est en dessous de T_0 au voisinage de 0.

Explications: Pour écrire le $DL_2(0)f(x)$, on utilise le $DL_3(0)(e^{2x}-1)$ et le $DL_3(0)(x^2+2\sin x)$. La division suivant les puissances croissantes donne :

$$DL_2(0)f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{7x^2}{6} + o(x^2).$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et f est continue en 0 et, puisque f admet un $DL_1(0)$, f est dérivable en 0. De plus, T_0 est la droite d'équation $y = 1 + \dfrac{x}{2}$ et puisque $f(x) - y = \dfrac{7x^2}{6} + o(x^2) \geqslant 0$ au voisinage de 0 : le graphe de f est au dessus de T_0 au voisinage de 0.

Question 308

Soit $f(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$ et $g(x) = 1 - \cos x$. On note T_0 la tangente au graphe de f au point 0. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] T_0 est horizontale et le graphe de f est en dessous de T_0 au voisinage de 0.
- ☐ [Vrai] $DL_2(0)g(x) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $DL_0(0)\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 + o(1)$.
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{1-\cos x} = 1$.

Explications: Les développements à l'ordre 2 en 0 de $(1+t)^\alpha$ et de $\cos(x)$ donnent :

$$DL_2(0)f(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad DL_2(0)g(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

D'abord, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{1-\cos x} = 1$. Ensuite, T_0 est la droite d'équation $y = 0$. Or, au voisinage de 0, on a : $f(x) - y \simeq \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0$. Donc le graphe de f est situé au dessus de T_0.

Question 309

On considère les fonctions f et g telles que $f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{1/(x+1)}$ et $g(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On note Γ le graphe de f et Δ la droite d'équation $y = x+2$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_2(0^+)g(x) = 1 + 2x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -1$.
- ☐ [Vrai] Au voisinage de $+\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ.
- ☐ [Faux] Au voisinage de $-\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ.

Explications: On a : $g(x) = (1+x)\mathrm{e}^{x/(1+x)}$. Dans $\mathrm{e}^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$, on pose $u = \dfrac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2)$. Ceci donne :

$$DL_2(0)g(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow DL_1(+\infty)f(x) = x + 2 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, au voisinage de $+\infty$, Γ admet Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ car $f(x) - y = \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right) \geqslant 0$ au voisinage de $+\infty$. Au voisinage de $-\infty$, Γ est situé en dessous de Δ car $f(x) - y = \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 0$ au voisinage de $-\infty$.

Question 310
Soit f telle que $f(x) = \dfrac{2}{\sin(x^2)} + \dfrac{2}{\ln(1-x^2)}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. La tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 lorsqu'elle existe est notée T_0. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] f n'est pas dérivable en 0.
- ☐ [Faux] f n'admet pas de développement limité d'ordre 2 en 0.
- ☐ [Vrai] $DL_2(0)f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- ☐ [Vrai] T_0 est la droite d'équation $y = 1$ et le graphe de f est au dessus de T_0 au voisinage de 0.

Explications: D'abord, $f(x) = 2\dfrac{\ln(1-x^2)+\sin(x^2)}{\sin(x^2)\ln(1-x^2)}$, et pour écrire le $DL_2(0)f(x)$, on utilise les $DL_6(0)\sin(x^2)$ et $DL_6(0)\ln(1-x^2)$. On trouve

$$DL_2(0)f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ainsi f est dérivable en 0, T_0 est la droite d'équation $y = 1$ et puisque $f(x) - y \simeq \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0$ au voisinage de 0 : le graphe de f est au dessus de T_0 au voisinage de 0.

8.8 Applications des DL | Niveau 4

Question 311
On considère les fonctions f et g telles que $f(x) = x \arctan x$ et $g(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On note Γ le graphe de f et Δ la droite d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_3(0^+)g(x) = \dfrac{\pi}{2} - x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et g se prolonge par continuité en 0.
- ☐ [Vrai] Au voisinage de $+\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ.
- ☐ [Faux] Au voisinage de $-\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ.

Explications: On a : $g(x) = \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$ si $x > 0$ et $g(x) = -\dfrac{\pi}{2} - \arctan x$ si $x < 0$. Or, $g'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2} = -1 + x^2 + o(x^2)$. Donc, par intégration :

$$DL_3(0^+)g(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Rightarrow DL_2(+\infty)f(x) = \frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et

$$DL_3(0^-)g(x) = -\frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Rightarrow DL_2(-\infty)f(x) = -\frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi, au voisinage de $+\infty$, Γ admet Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ car $f(x)-y=\dfrac{1}{3x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\geqslant 0$. Par contre, au voisinage de $-\infty$, Γ admet la droite Δ' d'équation $y=-\dfrac{\pi}{2}x-1$ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ' car $f(x)-y=\dfrac{1}{3x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\geqslant 0$. Enfin, g n'admet pas de limite en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-\dfrac{\pi}{2}$.

Question 312

On considère les fonctions f et g telles que $f(x)=x^2\arctan\dfrac{1}{1+x^2}$ et $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On note Γ le graphe de f et Δ la droite d'équation $y=1$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_2(0^+)g(x)=1+2x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-1$.
- ☐ [Faux] Au voisinage de $+\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ.
- ☐ [Vrai] Au voisinage de $-\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé en dessous de Δ.

Explications: On a : $g(x)=\dfrac{1}{x^2}\arctan\dfrac{x^2}{1+x^2}$. On vérifie que $DL_4(0)\arctan u=u-\dfrac{u^3}{3}+o(u^4)$ et donc avec $u=\dfrac{x^2}{1+x^2}=x^2-x^4+o(x^4)$, on obtient :

$$DL_2(0)g(x)=1-x^2+o(x^2)\Rightarrow DL_2(\pm\infty)f(x)=1-\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi, au voisinage de $\pm\infty$, Γ admet Δ comme asymptote et Γ est situé en dessous de Δ car $f(x)-y=-\dfrac{1}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\leqslant 0$. Enfin, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=1$.

Question 313

Soit $f(x)=x\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. On considère la fonction g telle que $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et on note Γ le graphe de f. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_2(0^+)g(x)=1-\dfrac{5x^2}{6}+o(x^2)$.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ et g se prolonge par continuité en 0.
- ☐ [Vrai] Γ admet la droite d'équation $y=1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.
- ☐ [Faux] Γ admet la droite d'équation $y=1$ comme asymptote au voisinage de $-\infty$.

Explications: On a : $g(x)=\dfrac{1}{x}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ si $x>0$ et $g(x)=\dfrac{-1}{x}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ si

$x<0$. Dans le $DL_3(0)\arctan u$, on pose $u=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x-\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)$. Ceci donne :

$$DL_2(0^+)g(x)=1-\frac{5x^2}{6}+o(x^2)\Rightarrow DL_2(+\infty)f(x)=1-\frac{5}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et

$$DL_2(0^-)g(x)=-1+\frac{5x^2}{6}+o(x^2)\Rightarrow DL_2(-\infty)f(x)=-1+\frac{5}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi Γ admet la droite d'équation $y=1$ (resp. $y=-1$) comme asymptote au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). Enfin, g n'admet pas de limite en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-1$.

Question 314

On considère les fonctions f et g telles que $f(x)=\sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{1/(x+1)}$ et $g(x)=xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On note Γ le graphe de f et Δ la droite d'équation $y=x+1$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] $DL_3(0^+)g(x)=1+x+\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)$.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ et g se prolonge par continuité en 0.
- ☐ [Vrai] Au voisinage de $+\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ.
- ☐ [Faux] Au voisinage de $-\infty$, Γ admet la droite Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ.

Explications: On a : $g(x)=\sqrt{1+x^2}\mathrm{e}^{x/(1+x)}$ si $x>0$ et $g(x)=-\sqrt{1+x^2}\mathrm{e}^{x/(1+x)}$ si $x<0$. On calcule le $DL_3(0)\sqrt{1+x^2}\mathrm{e}^{x/(1+x)}$. Ce qui donne :

$$DL_3(0^+)g(x)=1+x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\Rightarrow DL_2(+\infty)f(x)=x+1+\frac{2}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et

$$DL_3(0^-)g(x)=-1-x-\frac{2}{3}x^3+o(x^2)\Rightarrow DL_2(-\infty)f(x)=-x-1-\frac{2}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi, au voisinage de $+\infty$, Γ admet Δ comme asymptote et Γ est situé au dessus de Δ car $f(x)-y=\dfrac{2}{3x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\geqslant 0$. Mais, au voisinage de $-\infty$, Γ admet la droite Δ' d'équation $y=-x-1$ comme asymptote, et Γ est situé en dessous de Δ' car $f(x)-y=-\dfrac{2}{3x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\leqslant 0$. Enfin, g n'admet pas de limite en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-1$.

Equations différentielles

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

9 Equations différentielles

9.1 Equations du premier ordre | Niveau 1

Question 315
On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\ :\ y' - 2y = 0 \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y' + 2xy = 0.$$

Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] La solution générale de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{2x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{-x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] La solution générale de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Une primitive de -2 est $-2x$, donc la solution générale de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est :

$$y = k\mathrm{e}^{2x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Une primitive de $2x$ est x^2, donc la solution générale de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est :

$$y = k\mathrm{e}^{-x^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Question 316
On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\ :\ (1+x^2)y' - y = 0 \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y' - \frac{y}{1+x^2} = 0.$$

Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Si y est une solution de (E_1), alors $z = \dfrac{y}{1+x^2}$ est une solution de (E_2).
- ☐ [Vrai] (E_1) est (E_2) ont les mêmes solutions.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{arctan(x)}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] La solution générale de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\arctan(x)$, $k \in \mathbb{R}$.

Explications: En divisant (E_1) par $1+x^2$, on obtient (E_2) : (E_1) et (E_2) ont les mêmes solutions. Une primitive de $\dfrac{-1}{1+x^2}$ est $-\arctan x$, donc la solution générale de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{arctan(x)}$, $k \in \mathbb{R}$.

Question 317

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = \mathrm{e}^t$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] La fonction $y_0 = t\mathrm{e}^t$ est une solution de (E).
- ☐ [Faux] La fonction $y_1 = \mathrm{e}^{-t}$ est une solution de (E).
- ☐ [Faux] La fonction $y = (1-t)\mathrm{e}^t$ est l'unique solution de (E) telle que $y(1) = 0$.
- ☐ [Vrai] La fonction $y = (1+t)\mathrm{e}^t$ est l'unique solution de (E) telle que $y(0) = 1$.

Explications: On vérifie que $y_0 = t\mathrm{e}^t$ est une solution de (E). On vérifie aussi que $y = (1+t)\mathrm{e}^t$ est une solution de (E) et en plus $y(0) = 1$. Cette dernière est donc l'unique solution de (E) telle que $y(0) = 1$.

9.2 Equations du premier ordre | Niveau 2

Question 318

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2xy = 4x$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] La solution générale de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{-x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La fonction $y = -2$ est une solution particulière de (E).
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{x^2} - 2$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] E admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y'(0) = 0$.

Explications: La solution générale de l'équation homogène est : $Y = k\mathrm{e}^{x^2}$, $k \in \mathbb{R}$, et $y_0 = -2$ est une solution particulière. Donc la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k\mathrm{e}^{x^2} - 2$, $k \in \mathbb{R}$. Toute solution de (E) vérifie $y'(0) = 0$.

Question 319

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \mathrm{e}^x$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] La solution générale de l'équation homogène est $y = k\mathrm{e}^x$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] La fonction $y_0 = \mathrm{e}^x$ est une solution particulière de (E).
- ☐ [Vrai] La solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est $y = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.
- ☐ [Vrai] La solution de (E) vérifiant $y'(0) = 0$ est $y = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Explications: La solution générale de l'équation homogène est $y = ke^x$, $k \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0 = ae^x$. La solution générale de (E) est $y = ke^{-x} + \dfrac{e^x}{2}$, $k \in \mathbb{R}$. La condition $y(0) = 0$ donne $k = -1/2$, et la condition $y'(0) = 0$ donne $k = 1/2$.

Question 320

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 y' - (2x-1)y = x^2$ sur $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] La fonction $y = x^2$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] La fonction $y = x^2\left(1 - e^{1/x}\right)$ est une solution de l'équation homogène.
- ☐ [Faux] La fonction $y = 2x^2 e^{1/x}$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
- ☐ [Vrai] La fonction $y = x^2\left(1 - e^{1/x}\right)$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

Explications: La fonction $y_0 = x^2$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle vérifie (E) ; c'est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. De même, la fonction $y = x^2\left(1 - e^{1/x}\right)$ est continue, dérivable sur $]0, +\infty[$; c'est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

9.3 Equations du premier ordre | Niveau 3

Question 321

On considère l'équation différentielle $(E) : \left(1 + \cos^2 x\right) y' + y \sin(2x) = 0$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] $A(x) = \ln(1 + \cos^2 x)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $a(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1 + \cos^2 x}$.
- ☐ [Vrai] Toute solution de (E) vérifie $y'(0) = 0$.
- ☐ [Faux] (E) n'admet pas de solution vérifiant $y(0) = 0$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E) est : $y = k + k\cos^2 x$, $k \in \mathbb{R}$.

Explications: Toute solution y de (E) vérifie $y'(0) = 0$ car ,en posant $x = 0$ dans (E), on obtient $y'(0) = 0$. La relation $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ montre que $a(x)$ est de la forme $\dfrac{-u'}{u}$ avec $u = 1 + \cos^2 x$. Donc toute primitive de a est de la forme

$$A(x) = -\ln(1 + \cos^2 x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de (E) est $y = k(1 + \cos^2 x)$, $k \in \mathbb{R}$.

Question 322

On considère l'équation différentielle $(E) : (1 + x^2)y' - y = 1$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] La solution générale de l'équation homogène est : $y = ke^{-\arctan x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E) est : $y = -1 + ke^{\arctan x}$, $k \in \mathbb{R}$.

- ☐ [Vrai] L'unique solution de (E) vérifiant $y(0)=0$ et $y=-1+\mathrm{e}^{\arctan x}$.
- ☐ [Faux] (E) n'admet pas de solution vérifiant $y'(0)=0$.

Explications: Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène sont les fonctions $Y = k\mathrm{e}^{\arctan x}$, $k\in\mathbb{R}$, et $y_0=-1$ est une solution particulière. Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$y=-1+k\mathrm{e}^{\arctan x},\quad k\in\mathbb{R}.$$

La condition $y(0)=0$ donne $k=1$. Par ailleurs, $y=-1$ est une solution de (E) vérifiant $y'(0)=0$.

Question 323

On considère l'équation différentielle (E) : $\sqrt{1-x^2}y'-y=1$ sur $]-1,1[$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] La solution générale de l'équation homogène est : $y=k\mathrm{e}^{\arcsin x}$, $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] La solution générale de (E) est : $y=1+k\mathrm{e}^{\arcsin x}$, $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] La solution de (E) vérifiant $y(0)=0$ est $y=1-\mathrm{e}^{\arcsin x}$.
- ☐ [Vrai] (E) admet une unique solution vérifiant $y'(0)=0$ et c'est $y=-1$.

Explications: La solution générale de l'équation homogène sur $]-1,1[$ est : $Y=k\mathrm{e}^{\arcsin x}$, $k\in\mathbb{R}$. La fonction $y_0=-1$ est une solution particulière. Donc la solution générale de (E) est :

$$y=-1+k\mathrm{e}^{\arcsin x},\quad k\in\mathbb{R}.$$

La condition $y(0)=0$ donne $k=1$, d'où $y=-1+\mathrm{e}^{\arcsin x}$. Et la condition $y'(0)=0$ donne $k=0$, d'où $y=-1$.

Question 324

On considère l'équation différentielle (E) : $\sqrt{1+x^2}y'-xy=x$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] La solution générale de l'équation homogène est : $y=k\mathrm{e}^{1+x^2}$, $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E) est : $y=-1+k\mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}}$, $k\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] Toute solution y de (E) vérifie $y'(0)=0$.
- ☐ [Faux] (E) admet une unique solution vérifiant $y'(0)=0$.

Explications: La solution générale de l'équation homogène est $Y=k\mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}}$, $k\in\mathbb{R}$, et $y_0=-1$ est une solution particulière. En posant $x=0$ dans (E), on obtient $y'(0)=0$, donc toute solution de (E) vérifie $y'(0)=0$.

Question 325

On considère l'équation différentielle (E) : $(1+x^2)y'+2xy=2x$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] La solution générale de l'équation homogène est : $y = \dfrac{k}{1+x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.
- ☐ [Faux] (E) n'admet pas de solution vérifiant $y'(0) = 0$.
- ☐ [Faux] (E) admet une unique solution vérifiant $y'(0) = 0$.

Explications: La solution générale de l'équation homogène est : $Y = \dfrac{k}{1+x^2}$, $k \in \mathbb{R}$, et $y_0 = 1$ est une solution particulière. La solution générale de (E) est :

$$y = 1 + \frac{k}{1+x^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La condition $y(0) = 0$ donne $k = -1$. Par ailleurs, en posant $x = 0$ dans (E), on obtient $y'(0) = 0$. Donc toute solution de (E) vérifient la condition $y'(0) = 0$.

Question 326

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - \dfrac{xy}{1+x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] La solution générale de l'équation homogène est : $y = k\sqrt{1+x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La fonction $y = \arctan x . \sqrt{1+x^2}$ est une solution de E.
- ☐ [Faux] (E) possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] La solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est $y = x\sqrt{1+x^2}$.

Explications: La solution générale de (E) est $y = (k + \arctan x)\sqrt{1+x^2}$, $k \in \mathbb{R}$. Celle vérifiant $y(0) = 0$ est $y = \arctan x . \sqrt{1+x^2}$.

Question 327

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y' - y = 1$ sur $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] La fonction $y = -1 + \mathrm{e}^{-1/x}$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
- ☐ [Faux] La fonction $y = 1 - \mathrm{e}^{-1/x}$ est une solution de (E) sur $]-\infty, 0[$.
- ☐ [Faux] La fonction $y = 2\mathrm{e}^{-1/x}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution de (E) sur $]0, +\infty[$ vérifiant $y(1) = -1$ est constante.

Explications: La fonction $y = -1 + \mathrm{e}^{-1/x}$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$. Par contre $y = 1 - \mathrm{e}^{-1/x}$ n'est pas une solution de (E) sur $]-\infty, 0[$. Toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifie $y(0) = -1$, donc $y(x) = 2\mathrm{e}^{-1/x}$ ne peut être une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. La solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$ est $y = -1 + k\mathrm{e}^{-1/x}$, $k \in \mathbb{R}$. Donc, si $y(1) = -1$, alors $k = 0$.

Question 328

On considère l'équation différentielle (E) : $t^2y' = y$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] (E) est une équation linéaire homogène du premier ordre.
- ☐ [Faux] La fonction $y = \mathrm{e}^{1/t}$ est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E) sur $]0,+\infty[$ est $y = k\mathrm{e}^{-1/t}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] La fonction nulle est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Explications: Une primitive de $-1/t^2$ est $1/t$, donc la solution générale de (E), sur $]0,+\infty[$ (ou sur $]-\infty,0[$) est

$$y = k\mathrm{e}^{-1/t}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $y(0) = 0$ et

$$y(t) = \begin{cases} k_1\mathrm{e}^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ k_2\mathrm{e}^{-1/t} & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

La continuité en 0 implique que $k_2 = 0$. Ainsi

$$(\star) \qquad y(t) = k_1\mathrm{e}^{-1/t} \text{ si } t > 0 \text{ et } y(t) = 0 \text{ si } t \leqslant 0.$$

De plus, une telle fonction est dérivable en 0. Réciproquement, toute fonction définie par $(\star)$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

9.4 Equations du premier ordre | Niveau 4

Question 329

On considère l'équation différentielle (E) : $y' \ln x + \dfrac{y}{x} = 2x$ sur $]1,+\infty[$. Parmi les affirmations suivantes cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] La solution générale de l'équation homogène est : $y(x) = k\ln x$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] Si $y(x) = \dfrac{k(x)}{\ln x}$ est une solution de (E) sur $]1,+\infty[$, alors $k'(x) = 2x$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E) sur $]1,+\infty[$ est $y(x) = \dfrac{k + x^2}{\ln x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] (E) possède une infinité de solutions sur $[1,+\infty[$.

Explications: Une primitive de $\dfrac{1}{x\ln x}$ est $\ln|\ln x|$, donc la solution générale de l'équation homogène est $y(x) = \dfrac{k}{\ln x}$. Si $y(x) = \dfrac{k(x)}{\ln x}$ est une solution de (E) sur $]1,+\infty[$, alors $k'(x) = 2x$ et donc $k = x^2 + C$. Ainsi la solution générale de (E) sur $]1,+\infty[$ est : $y(x) = \dfrac{k + x^2}{\ln x}$, $k \in \mathbb{R}$. On pose $x = 1$ dans (E), on aura $y(1) = 2$. Or $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \dfrac{k + x^2}{\ln x} = 2$ si, et seulement si, $k = -1$. Donc (E) ne peut admettre une infinité de solutions sur $[1,+\infty[$.

Question 330

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y\tan x = 1$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] La solution générale de l'équation homogène est $y = \dfrac{k}{\cos(x)}$, $k \in \mathbb{R}$.

- ☐ [Vrai] Si $y = \dfrac{k(x)}{\cos(x)}$ est une solution de (E), alors $k'(x) = \cos(x)$.
- ☐ [Faux] La solution générale de (E) est $y = \dfrac{k}{\cos(x)} + \sin x$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] (E) possède une solution qui se prolonge par continuité en $-\pi/2$ et en $\pi/2$.

Explications: Une primitive de $-\tan(x)$ est $\ln|\cos x|$, donc la solution générale de l'équation homogène est : $y(x) = \dfrac{k}{\cos(x)}$. La variation de la constante montre que $y_0 = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est une solution particulière. Enfin, une solution $y = \dfrac{k + \sin(x)}{\cos(x)}$ de (E) se prolonge par continuité en $-\pi/2$ si et seulement si $k = 1$ et se prolonge par continuité en $\pi/2$ si et seulement si $k = -1$. Aucune solution de (E) ne se prolonge par continuité en $-\pi/2$ et en $\pi/2$.

Question 331
On considère l'équation différentielle (E) : $xy' - 2y = x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] La solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$ est : $y = kx^2 - x$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E) sur $]-\infty, 0[$ est : $y = kx^2 - x$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y(x) = kx^2 - x$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] (E) possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.

Explications: La solution générale de l'équation homogène est : $y = kx^2$, $k \in \mathbb{R}$, et $y_0 = -x$ est une solution particulière. Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors y est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$ et y est une solution de (E) sur $]-\infty, 0[$. De plus y est continue en 0. D'où

$$y(x) = \begin{cases} k_1x^2 - x & \text{si} \quad x \in]0, +\infty[\\ k_2x^2 - x & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Une telle fonction est dérivable en 0. réciproquement, toute fonction de la forme ci-dessus est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Question 332
On considère l'équation différentielle (E) : $(x+1)y' + y = 2x + 1$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] La solution générale de (E) sur $]-1, +\infty[$ est : $y = x + \dfrac{k}{x+1}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E) sur $]-\infty, -1[$ est :$y = x + \dfrac{k}{x+1}$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y = x + \dfrac{k}{x+1}$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] (E) possède une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$.

Explications: Remarquer que $y_0 = x$ est une solution particulière. Donc la solution générale de (E) sur $]-1,+\infty[$, ou $]-\infty,-1[$, est : $y = x + \dfrac{k}{x+1}$, $k \in \mathbb{R}$. Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors y est une solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ et y est une solution de (E) sur $]-\infty,-1[$. De plus, avec $x=-1$ dans (E), on aura $y(-1)=-1$. D'où

$$y(x) = \begin{cases} y(x) = x + \dfrac{k_1}{x+1} & \text{si} \quad x \in]-1,+\infty[\\[2ex] y(x) = x + \dfrac{k_2}{x+1} & \text{si} \quad x \in]-\infty,-1[\\ -1 & \text{si} \quad x = -1. \end{cases}$$

La continuité de y en -1 implique que $k_1 = k_2 = 0$. L'équation (E) ne possède qu'une seule solution sur $\mathbb{R}$.

Question 333
On considère l'équation différentielle (E) : $(1-x^2)y' - (1+x)y = 1$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] La solution générale de (E) sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$ est :

$$y = \frac{k + \ln|1+x|}{1-x}, \ k \in \mathbb{R}.$$

- ☐ [Faux] L'équation (E) admet une solution sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] L'équation (E) admet une solution sur $]-\infty,1[$.
- ☐ [Vrai] L'équation (E) admet une unique solution sur $]-1,+\infty[$.

Explications: La solution générale de l'équation homogène sur l'un de ces intervalles est $y = \dfrac{k}{1-x}$, $k \in \mathbb{R}$. La variation de la constante implique que $y_0 = \dfrac{\ln|1+x|}{1-x}$ est une solution particulière. En posant $x=-1$ dans (E), on obtient $0=1$ ce qui est absurde. Donc (E) n'admet pas de solution ni sur $\mathbb{R}$ ni sur $]-\infty,1[$.

Si y est une solution sur $]-1,+\infty[$, on aura :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{k_1 + \ln(1+x)}{1-x} & \text{si} \quad x \in]-1,1[\\[2ex] \dfrac{k_2 + \ln(1+x)}{1-x} & \text{si} \quad x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

et $y(1) = -1/2$. La continuité en 1 implique que $k_1 = k_2 = -\ln 2$. Une telle fonction est aussi dérivable en 1. Ainsi (E) admet une unique solution sur $]-1,+\infty[$.

Question 334
On considère l'équation différentielle (E) : $x(1-x)y' + y = x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] La solution générale de l'équation homogène sur $]1,+\infty[$ est $y = \dfrac{k(x-1)}{x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La fonction $y = \dfrac{1-x}{x}\ln|1-x| + \dfrac{1}{x}$ est une solution de (E) sur $]1,+\infty[$.
- ☐ [Faux] L'équation (E) admet une infinité de solutions sur $]-\infty,1[$.
- ☐ [Faux] L'équation (E) admet une solution sur $]0,+\infty[$.

Explications: Si (E) admet une solution y sur $]-\infty,1[$, on aura :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{k_1(x-1)}{x} + \dfrac{1-x}{x}\ln|1-x| + \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \in]-\infty,0[\\[2ex] \dfrac{k_2(x-1)}{x} + \dfrac{1-x}{x}\ln|1-x| + \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

et $y(0) = 0$. La continuité de y en 0, implique que $k_1 = k_2 = 1$. De plus, une telle fonction est dérivable en 0. Ainsi (E) admet une unique solution sur $]-\infty,1[$. De même, si (E) admet une solution y sur $]0,+\infty[$, on aura :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{k_1(x-1)}{x} + \dfrac{1-x}{x}\ln|1-x| + \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \in]0,1[\\[2ex] \dfrac{k_2(x-1)}{x} + \dfrac{1-x}{x}\ln|1-x| + \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

et $y(1) = 1$. Une telle fonction est continue en 1 mais elle n'est pas dérivable en 1. Ainsi (E) n'admet pas de solution sur $]0,+\infty[$.

9.5 Equations du second ordre | Niveau 1

Question 335

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] La solution générale de l'équation différentielle $y'' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$ est
$$y = (k_1x + k_2)\mathrm{e}^x, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$
- ☐ [Vrai] La solution générale de l'équation différentielle $y'' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$ est
$$y = k_1\mathrm{e}^x + k_2\mathrm{e}^{-x}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$
- ☐ [Vrai] La solution générale de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ est
$$y = k_1\mathrm{e}^x + k_2\mathrm{e}^{2x}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$
- ☐ [Faux] La solution générale de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ est
$$y_1 = k_1\mathrm{e}^x \quad \text{ou} \quad y_2 = k_2\mathrm{e}^{2x}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Explications: Les solutions de l'équation caractéristique $r^2-1=0$ sont ± 1. Donc la solution générale de $y''-y=0$ est $y=k_1\mathrm{e}^x+k_2\mathrm{e}^{-x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation caractéristique $r^2-3r+2=0$ sont 1 et 2. Donc la solution générale de $y''-3y'+2y=0$ est $y=k_1\mathrm{e}^x+k_2\mathrm{e}^{2x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

Question 336
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''-2y'+y=0$ sont les fonctions $y=(k_1+k_2x)\mathrm{e}^x$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''-2y'+y=0$ sont les fonctions $y_1=\mathrm{e}^x$ et $y_2=x\mathrm{e}^x$.
- ☐ [Faux] Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+4y'+4y=0$ sont les fonctions $y_1=\mathrm{e}^{2x}$ et $y_2=2\mathrm{e}^{2x}$.
- ☐ [Vrai] Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+4y'+4y=0$ sont les fonctions $y=(k_1+k_2x)\mathrm{e}^{-2x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

Explications: L'équation caractéristique $r^2-2r+1=0$ admet 1 comme racine double. Donc la solution générale de $y''-2y'+y=0$ est $y=(k_1+k_2x)\mathrm{e}^x$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.
L'équation caractéristique $r^2+4r+4=0$ admet -2 comme racine double. Donc la solution générale de $y''+4y'+4y=0$ est $y=(k_1+k_2x)\mathrm{e}^{-2x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

Question 337
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+y=0$ sont les fonctions $y_1=\sin(x)$ et $y_2=\cos(x)$.
- ☐ [Vrai] Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+y=0$ sont les fonctions $y=k_1\cos(x)+k_2\sin(x)$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+4y=0$ sont les fonctions $y_1=\sin(2x)$ et $y_2=\cos(2x)$.
- ☐ [Vrai] Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+4y=0$ sont les fonctions $y=k_1\cos(2x)+k_2\sin(2x)$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

Explications: Les solutions de l'équation caractéristique $r^2+1=0$ sont $\pm\mathrm{i}$. Donc la solution générale de $y''+y=0$ est $y=k_1\cos(x)+k_2\sin(x)$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation caractéristique $r^2+4=0$ sont $\pm 2\mathrm{i}$. Donc la solution générale de $y''+4y=0$ est $y=k_1\cos(2x)+k_2\sin(2x)$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

Question 338
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''-2y'+2y=0$ sont les fonctions $y=k_1\cos(x)+k_2\sin(x)$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

- ☐ [Vrai] Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ sont les fonctions $y = \mathrm{e}^x[k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x)]$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = 0$ sont les fonctions $y = \mathrm{e}^{-x}[k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x)]$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = 0$ sont les fonctions $y_1 = \mathrm{e}^{-x} \cos(2x)$ et $y_2 = \mathrm{e}^{-x} \sin(2x)$.

Explications: Les solutions de l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$ sont $1 \pm \mathrm{i}$. Donc la solution générale de $y'' - 2y' + 2y = 0$ est :

$$y = \mathrm{e}^x[k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x)], \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 5 = 0$ sont $-1 \pm 2\mathrm{i}$. Donc la solution générale de $y'' + 2y' + 5y = 0$ est :

$$y = \mathrm{e}^{-x}[k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x)], \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

9.6 Equations du second ordre | Niveau 2

Question 339

On considère les équations différentielles :

$$(E_1) \ : \ y'' - 4y = 4x \quad \text{et} \quad (E_2) \ : \ y'' + 2y' + y = x + 2.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] La solution générale de (E_1) est : $y = -x + k_1\mathrm{e}^{2x} + k_2\mathrm{e}^{-2x}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Les solutions de (E_1) sont les fonctions $y = -x + \mathrm{e}^{2x}$ et $y_2 = -x + \mathrm{e}^{-2x}$.
- ☐ [Faux] La solution générale de (E_2) est : $y = x + k\mathrm{e}^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E_2) est $y = x + (k_1 x + k_2)\mathrm{e}^{-x}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Explications: Les solutions de l'équation caractéristique associée à (E_1) sont ± 2 et $y_0 = -x$ est une solution particulière de (E_1). Donc la solution générale de (E_1) est :

$$y = -x + k_1\mathrm{e}^{2x} + k_2\mathrm{e}^{-2x}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

L'équation caractéristique associée à (E_2) admet -1 comme racine double et $y_0 = x$ est une solution particulière de (E_2). Donc la solution générale de (E_2) est :

$$y = x + (k_1 x + k_2)\mathrm{e}^{-x}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Question 340

Sur $\mathbb{R}$, on considère les équations différentielles :

$$(E_1) \ : \ y'' - y' - 2y = 2 \quad \text{et} \quad (E_2) \ : \ y'' + y = x.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Les solutions de (E_1) sont les fonctions $y=-1+k_1\mathrm{e}^{2x}+k_2\mathrm{e}^{-x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Les solutions de (E_1) sont les fonctions $y_1=-1+\mathrm{e}^{2x}$ et $y_2=-1+\mathrm{e}^{-x}$.
- ☐ [Vrai] Les solutions de (E_2) sont les fonctions $y=x+k_1\cos(x)+k_2\sin(x)$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Les solutions de (E_2) sont les fonctions $y=x+\cos(x)$ et $y_2=x+\sin(x)$.

Explications: Les solutions de l'équation caractéristique associée à (E_1) sont 2 et -1 et $y_0=-1$ est une solution particulière de (E_1). Donc la solution générale de (E_1) est

$$y=-1+k_1\mathrm{e}^{2x}+k_2\mathrm{e}^{-x},\quad k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation caractéristique associée à (E_2) sont $\pm\mathrm{i}$ et $y_0=x$ est une solution particulière de (E_2). Donc la solution générale de (E_2) est

$$y=x+k_1\cos(x)+k_2\sin(x),\quad k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

9.7 Equations du second ordre | Niveau 3

Question 341
On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\ :\ y''-y=3+\mathrm{e}^{2x}\quad\text{et}\quad(E_2)\ :\ y''-y=2+\mathrm{e}^{x}.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] (E_1) admet une solution particulière sous la forme $y_0=a+b\mathrm{e}^{2x}$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] (E_2) admet une solution particulière sous la forme $y_0=a+b\mathrm{e}^{x}$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] La solution générale de (E_1) est : $y=-3+\mathrm{e}^{2x}+k_1\mathrm{e}^{x}+k_2\mathrm{e}^{-x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E_2) est : $y=-2+\left(k_1+\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{x}+k_2\mathrm{e}^{-x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

Explications: Les solutions de l'équation caractéristique sont ±1. Donc (E_1) admet une solution particulière sous la forme $y_0=a+b\mathrm{e}^{2x}$, car 2 n'est pas une racine de l'équation caractéristique, et (E_2) admet une solution particulière sous la forme $y_0=a+bx\mathrm{e}^{x}$ car 1 est une racine simple de l'équation caractéristique.

Question 342
On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\ :\ y''-4y'+4y=4+2\mathrm{e}^{2x}\quad\text{et}\quad(E_2)\ :\ y''-4y'+4y=8+\mathrm{e}^{x}.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] (E_1) admet une solution particulière sous la forme $y_0=a+b\mathrm{e}^{2x}$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] (E_2) admet une solution particulière sous la forme $y_0=a+b\mathrm{e}^{x}$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E_1) est $y=1+\left(k_1+k_2x+x^2\right)\mathrm{e}^{2x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] La solution générale de (E_2) est $y=1+\mathrm{e}^{x}+(k_1+k_2x)\,\mathrm{e}^{2x}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

Explications: L'équation caractéristique admet 2 comme racine double. Donc (E_1) admet une solution particulière sous la forme $y_0 = a + bx^2 e^{2x}$, car 2 est une racine double de l'équation caractéristique, et (E_2) admet une solution particulière sous la forme $y_0 = a + be^x$ car 1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique.

Question 343
On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\ :\ y'' - 3y' + 2y = e^{2x} \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y'' - 3y' + 2y = 2xe^x.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] (E_1) admet une solution sous la forme $y_0 = ae^{2x}$ où $a \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] (E_2) admet une solution sous la forme $y_0 = (ax + b)e^x$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E_1) est $y = ae^x + (b + x)e^{2x}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E_2) est $y = \left(a - 2x - x^2\right)e^x + be^{2x}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Explications: Les racines de l'équation caractéristique sont 1 et 2. Donc (E_1) admet une solution particulière sous la forme $y_0 = axe^{2x}$, car 2 est une racine simple de l'équation caractéristique, et (E_2) admet une solution particulière sous la forme $y_0 = x(a + bx)e^x$ car 1 est une racine simple de l'équation caractéristique.

Question 344
On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + y = 2\cos x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] Toute solution de (E) est combinaison linéaire de $\sin x$ et $\cos x$.
- ☐ [Vrai] Toute solution de (E) est combinaison linéaire de $\sin x$, $\cos x$, $x\sin x$ et $x\cos x$.
- ☐ [Vrai] (E) admet une solution sous la forme $y = x(a\sin x + b\cos x)$, où $a, b, \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] La solution de (E) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ est $y = x\cos x$.

Explications: La solution générale de l'équation homogène est : $Y = k_1 \cos x + k_2 \sin x$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. On vérifie que, $y_0 = x\sin x$ est une solution particulière de (E). Donc la solution générale de (E) est : $y = k_1 \cos x + (k_2 + x)\sin x$, pour $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Enfin, $y(0) = 0 \Rightarrow k_1 = 0$ et $y'(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0$.

Question 345
On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\ :\ y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y'' - 4y' + 5y = 8\sin x.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Faux] (E_1) admet une solution sous la forme $y_0 = axe^{2x}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] (E_2) admet une solution sous la forme $y_0 = a\sin x$ avec $a \in \mathbb{R}$.

- ☐ [Vrai] La solution générale de (E_1) est $y = e^{2x}[1 + a\cos x + b\sin x]$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E_2) est $y = \left(1 + ae^{2x}\right)\cos x + \left(1 + be^{2x}\right)\sin x$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Explications: Les solutions de l'équation caractéristique sont $2 \pm i$. Donc (E_1) admet une solution particulière sous la forme $y_0 = ae^{2x}$ et (E_2) admet une solution particulière sous la forme $y_0 = a\cos x + b\sin x$. Les calculs montrent que la solution générale de (E_1) est $y = e^{2x}[1 + a\cos x + b\sin x]$, $a, b \in \mathbb{R}$, et la solution générale de (E_2) est :

$$y = \left(1 + ae^{2x}\right)\cos x + \left(1 + be^{2x}\right)\sin x,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Question 346
On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Les solutions de l'équation caractéristique sont $1 \pm i$.
- ☐ [Faux] (E) admet une solution sous la forme $y_0 = ae^x \cos x$ avec $a \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La fonction $y_0 = xe^x \sin x$ est une solution de (E).
- ☐ [Faux] La solution générale de (E) est : $y = e^x(a\cos x + b\sin x) + 2e^x \cos x$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Explications: La solution générale de l'équation homogène est $Y = e^x(a\cos x + b\sin x)$, a et $b \in \mathbb{R}$, et $y_0 = xe^x \sin x$ est une solution particulière de (E). Donc la solution générale de (E) est : $y = Y + y_0 = e^x(a\cos x + b\sin x) + xe^x \sin x$, $a, b \in \mathbb{R}$.

9.8 Equations du second ordre | Niveau 4

Question 347
On considère les équations différentielles

$$(E_1)\ :\ xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 2e^{-x} \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ y'' + 2y' + y = 2e^{-x}.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Si y est une solution de (E_1), alors $z = xy$ est une solution de (E_2).
- ☐ [Faux] (E_2) admet une solution particulière sous la forme $y_0 = ae^{-x}$, $a \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E_1) sur $]0, +\infty[$ est $y = \left(x + a + \dfrac{b}{x}\right)e^{-x}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Toute solution de (E_1) sur $]0, +\infty[$ se prolonge par continuité en 0.

Explications: On a : $z' = xy' + y$, $z'' = xy'' + 2y'$ et $z'' + 2z' + z = xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y$. La solution générale de l'équation homogène associée à (E_2) est : $Z = (ax + b)e^{-x}$ et $z_0 = x^2 e^{-x}$ est une solution particulière de (E_2). Donc la solution générale de (E_2) est $z = Z + z_0$. Ainsi, la solution générale de (E_1) sur $]0, +\infty[$ est : $y = \left(x + a + \dfrac{b}{x}\right)e^{-x}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Une telle solution se prolonge par continuité en 0 si et seulement si $b = 0$.

Question 348
On considère les équations différentielles

$$(E_1)\ :\ xy''+2y'-xy=2\mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ z''-z=2\mathrm{e}^x.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies :

- ☐ [Vrai] Si y est une solution de (E_1), alors $z=xy$ est une solution de (E_2).
- ☐ [Faux] (E_1) admet une solution particulière sous la forme $y_0=a\mathrm{e}^x$, $a\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] La solution générale de (E_1) sur $]0,+\infty[$ est $y=\left(\dfrac{a}{x}+1\right)\mathrm{e}^x+\dfrac{b}{x}\mathrm{e}^{-x}$, $a,b\in\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] (E_1) n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Explications: On a : $z'=xy'+y$, $z''=xy''+2y'$ et $z''-z=xy''+2y'-xy$. La solution générale de l'équation homogène associée à (E_2) est : $Z=a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}$ et $z_0=x\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de (E_2). Donc la solution générale de (E_2) est $z=Z+z_0$. Ainsi, la solution générale de (E_1) sur $]0,+\infty[$ est : $y=\left(\dfrac{a}{x}+1\right)\mathrm{e}^x+\dfrac{b}{x}\mathrm{e}^{-x}$, $a,b\in\mathbb{R}$. Une telle solution se prolonge par continuité en 0 si et seulement si $a=b=0$. D'où $y=\mathrm{e}^x$. Réciproquement, on vérifie qu'une telle fonction est bien une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

Courbes paramétrées

Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

10 Courbes paramétrées

10.1 Courbes paramétrées | Niveau 1

Question 349
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x=t-1 \quad \text{et} \quad y=t+1.$$

- ☐ [Vrai] Γ est la droite d'équation $y=2+x$.
- ☐ [Faux] La tangente à Γ au point $(x(0),y(0))$ est la droite d'équation $y=x$.
- ☐ [Vrai] La tangente à Γ au point $(x(1),y(1))$ est la droite d'équation $y=2+x$.
- ☐ [Faux] Γ possède un point double.

Explications: En éliminant le paramètre t, on obtient $y=2+x$. Γ est la droite d'équation $y=2+x$ et elle est confondue avec sa tangente en n'importe quel point.

Question 350
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = 1 + \cos(2t) \quad \text{et} \quad y = 1 + \sin(2t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

- ☐ [Faux] Γ est le cercle de centre $(1,1)$ et de rayon 2.
- ☐ [Vrai] Γ possède un point double.
- ☐ [Vrai] La tangente à Γ au point $(x(0), y(0))$ est la droite d'équation $x = 2$.
- ☐ [Faux] La tangente à Γ au point $(x(\pi), y(\pi))$ est la droite d'équation $y = x$.

Explications: En éliminant le paramètre t, on obtient : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Donc Γ est le cercle de centre $(1,1)$ et de rayon 1. Les points de paramètres 0 et π sont confondus. Enfin, $x'(0) = 0$ et $y'(0) \neq 0$, donc la tangente au point $(x(0), y(0))$ est la droite d'équation $x = x(0)$.

10.2 Courbes paramétrées | Niveau 2

Question 351
Un avion en papier a effectué un vol suivant la trajectoire Γ donnée par

$$x = t - 2\sin t \quad \text{et} \quad y = 4 - 3\cos t.$$

- ☐ [Faux] A l'instant $t = \pi$, l'avion volait en position verticale.
- ☐ [Vrai] A l'instant $t = \pi$, l'avion volait en position horizontale.
- ☐ [Faux] A l'instant $t = \pi/2$, l'avion volait suivant la droite d'équation $y = 3x + 10$.
- ☐ [Vrai] A l'instant $t = \pi/3$, l'avion volait en position verticale.

Explications: On a : $y'(\pi) = 0$ et $x'(\pi) \neq 0$. Donc la tangente au point de paramètre π est horizontale. A l'instant $t = \pi/2$, l'avion volait suivant la tangente à Γ à cet instant. C'est-à-dire suivant la droite d'équation $y = 3x + 10 - 3\pi/2$. Enfin, $x'(\pi/3) = 0$ et $y'(\pi/3) \neq 0$. Donc la tangente au point de paramètre $\pi/3$ est verticale.

Question 352
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = t^2 + t^3 \quad \text{et} \quad y = 2t^2 - t^3.$$

- ☐ [Faux] Le point de paramètre 0 est un point de rebroussement de seconde espèce.
- ☐ [Vrai] La tangente à Γ au point $(x(0), y(0))$ est la droite d'équation $y = 2x$.
- ☐ [Vrai] La tangente à Γ au point $(x(1), y(1))$ est dirigée par le vecteur $(5,1)$.
- ☐ [Faux] La tangente à Γ au point $(x(1), y(1))$ est la droite d'équation $5x - y + 3 = 0$.

Explications: Le $DL_3(0)$ de $f(t) = (x(t), y(t))$ est

$$f(t) = t^2(1,2) + t^3(1,-1) + t^3\left(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)\right) \text{ avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon_i(t) = 0.$$

Donc le point de paramètre 0 est un point de rebroussement de première espèce et la tangente en ce point est la droite d'équation $y = 2x$. La tangente à Γ au point de paramètre 1 est dirigée par $f'(1) = (5,1)$.

Question 353
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = 2t^2 - t^4 \quad \text{et} \quad y = t^2 + t^4.$$

- ☐ [Vrai] Le point de paramètre 0 est un point de rebroussement de seconde espèce.
- ☐ [Faux] La tangente à Γ au point $(x(0), y(0))$ est la droite d'équation $y = 2x$.
- ☐ [Faux] Γ admet la droite d'équation $y = -x$ comme asymptote quand t tend vers l'infini.
- ☐ [Vrai] Γ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = -x$.

Explications: Le $DL_4(0)$ de $f(t) = (x(t), y(t))$ est

$$f(t) = t^2(2,1) + t^4(-1,1) + t^4(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \text{ avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon_i(t) = 0.$$

Donc le point de paramètre 0 est un point de rebroussement de seconde espèce et la tangente en ce point est la droite d'équation $2y - x = 0$. Enfin $\lim_{t\to\pm\infty} [y(t) + x(t)] = +\infty$, donc Γ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = -x$.

10.3 Courbes paramétrées | Niveau 3

Question 354
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = \frac{1}{2}(t^2 - 2t) \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2.$$

- ☐ [Faux] Le point de paramètre 1 est un point de rebroussement de seconde espèce.
- ☐ [Vrai] La tangente à Γ au point $(x(1), y(1))$ est la droite d'équation $y = x$.
- ☐ [Faux] Le point de paramètre 0 est un point stationnaire.
- ☐ [Vrai] Γ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y.

Explications: Avec $f(t) = (x(t),(y(t))$. On a : $f'(1) = (0,0)$, $f''(1) = (1,1)$ et $f^{(3)}(1) = (0,2)$. Le point de paramètre 1 est un point de rebroussement de première espèce et la tangente en ce point est la droite d'équation $x - y = 0$. Enfin

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty.$$

Donc Γ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

Question 355
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = 2 + \cos t \quad \text{et} \quad y = \frac{t^2}{2} + \sin t.$$

☐ [Vrai] Γ n'admet pas de point stationnaire.

☐ [Vrai] Le point de paramètre $t = \pi/2$ est un point d'inflexion.

☐ [Faux] La tangente à Γ au point de paramètre $t = \pi/2$ est verticale.

☐ [Faux] Γ est symétrique par rapport à l'axe des x.

Explications: Notons $f(t) = (x(t), y(t))$. Le système $f'(t) = (0,0)$ n'admet pas de solution, donc Γ n'admet pas de point stationnaire. $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t)$ n'existe pas. Un DL de f en $\pi/2$ montre que le point de paramètre $t = \pi/2$ est un point d'inflexion et la tangente en ce point est dirigée par le vecteur $f'(\pi/2) = (-1, \pi/2)$. Enfin y n'est ni paire ni impaire, donc Γ n'est pas symétrique par rapport à l'axe des x.

Question 356

La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = 1 + \cos t \quad \text{et} \quad y = t - \sin t.$$

☐ [Faux] Γ est symétrique par rapport à l'axe des y.

☐ [Faux] Γ admet un point double.

☐ [Vrai] Le point de paramètre $t = 0$ est un point de rebroussement de première espèce.

☐ [Vrai] La tangente à Γ au point de paramètre $t = 0$ est horizontale.

Explications: D'abord, x est paire et y est impaire, donc Γ est symétrique par rapport à l'axe des x. Ensuite, en notant $f(t) = (x(t), y(t))$, la résolution du système $f(t_1) = f(t_2)$ donne $t_1 = t_2$, donc Γ ne possède pas de point double. Enfin, on a :

$$f(t) = (2,0) + t^2(-1/2, 0) + t^3(0, 1/6) + t^3\,(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \text{ avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon_i(t) = 0.$$

Donc le point de paramètre $t = 0$ est un point de rebroussement de première espèce et la tangente en ce point est horizontale.

Question 357

La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x(t) = \frac{1}{1-t^2} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{1}{1+t^4}.$$

☐ [Faux] Γ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

☐ [Vrai] Γ admet la droite d'équation $y = 1/2$ comme asymptote quand t tend vers 1.

☐ [Vrai] Le point de paramètre $t = 0$ est un point de rebroussement de seconde espèce.

☐ [Faux] La tangente à Γ au point de paramètre $t = 0$ est verticale.

Explications: y étant strictement positive, Γ ne peut être symétrique par rapport à l'origine du repère. Ensuite, $\lim\limits_{t\to 1^\pm} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to 1} y(t) = 1/2$, donc la droite d'équation $y = 1/2$ est une asymptote. Le $DL_4(0)$ de $f(t) = (x(t), y(t))$ est

$$f(t) = (1,1) + t^2(1,0) + t^4(1,-1) + t^4\,(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \text{ avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon_i(t) = 0.$$

On en déduit que le point de paramètre $t = 0$ est un point de rebroussement de seconde espèce et que la tangente en ce point est horizontale.

Question 358
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = \frac{t^2}{1-t^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{t^2}{1+t}.$$

- ☐ [Faux] Le point de paramètre 0 est un point de rebroussement de seconde espèce.
- ☐ [Vrai] La tangente à Γ au point de paramètre 1 est la droite d'équation $y = x$.
- ☐ [Faux] Γ admet la droite d'équation $y = 2$ comme asymptote quand t tend vers 1.
- ☐ [Vrai] Γ admet la droite d'équation $y = 2x - 1/2$ comme asymptote quand t tend vers -1.

Explications: On a : $f(t) = t^2(1,1) + t^3(0,-1) + t^3(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))$ avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon_i(t) = 0$. Donc le point de paramètre 0 est un point de rebroussement de première espèce et la tangente en ce point est la droite d'équation $y = x$. Enfin, l'étude des branches infinies, quand t tend vers 1 et quand t tend vers -1, montre que les droites d'équation $y = 1/2$ et d'équation $y = 2x - 1/2$ sont des asymptotes.

10.4 Courbes paramétrées | Niveau 4

Question 359
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = \frac{t}{4-t^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{t^2}{2-t}.$$

- ☐ [Faux] Γ admet un seul point stationnaire.
- ☐ [Faux] La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote quand t tend vers -2.
- ☐ [Vrai] La droite d'équation $y = 8x - 3$ est une asymptote quand t tend vers 2.
- ☐ [Vrai] Le point de coordonnées $(1/2, 2)$ est un point double.

Explications: D'abord, Γ n'a pas de point stationnaire car $x'(t) \neq 0$. Puis, $\lim_{t\to -2^\pm} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t\to -2} y(t) = 1$, donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote quand t tend vers -2. De même, $\lim_{t\to 2^\pm} x(t) = \lim_{t\to 2^\pm} y(t) = \pm\infty$, $\lim_{t\to 2^\pm} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 8$ et $\lim_{t\to 2^\pm}[y(t) - x(t)] = -3$. Donc la droite d'équation $y = 8x - 3$ est une asymptote quand t tend vers 2. Enfin, la résolution de $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$ montre que $(1/2, 2)$ est un point double obtenu avec les paramètres $-1 + \sqrt{5}$ et $-1 - \sqrt{5}$.

Question 360
La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x = \frac{t^2}{1-t} \quad \text{et} \quad y = \frac{3t-1}{1-t^2}.$$

- ☐ [Faux] Γ admet un seul point stationnaire.
- ☐ [Faux] La droite d'équation $y = 1/2$ est une asymptote quand t tend vers -1.
- ☐ [Vrai] La droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote quand t tend vers 1.
- ☐ [Vrai] Le point de paramètre 0 est un méplat.

Explications: D'abord, Γ n'a pas de point stationnaire car $y'(t) \neq 0$. Puis, $\lim\limits_{t\to -1} x(t) = 1/2$ et $\lim\limits_{t\to -1^{\pm}} y(t) = \pm\infty$, donc la droite d'équation $x = 1/2$ est une asymptote quand t tend vers -1. De même, $\lim\limits_{t\to 1^{\pm}} x(t) = \lim\limits_{t\to 1^{\pm}} y(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to 1^{\pm}} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$ et $\lim\limits_{t\to 2^{\pm}} [y(t) - x(t)] = 1$. Donc la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote quand t tend vers 1. Enfin, le $DL_2(0)$ de $f(t) = (x(t), y(t))$ est

$$f(t) = (0, -1) + t(0, 3) + t^2(1, -1) + t^2(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \text{ avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon_i(t) = 0.$$

Donc le point de paramètre 0 est un point ordinaire.