CALCUL DIFFÉRENTIEL

1 Dérivées partielles et dérivée directionnelle

Exercice 1 – Dérivées partielles
Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition. Pour chacune de ces fonctions, calculer ensuite les dérivées partielles en chaque point du domaine de définition lorsqu'elles existent :

1. $f(x,y) = x^2 \exp(xy)$
2. $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$
3. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$
4. $f(x,y,z) = x^2 y^2 \sqrt{z}$

Indications 1 –
Pour calculer les dérivées partielles par rapport à une variable, interpéter les autres variables comme paramètres et utiliser les règles ordinaires de calcul de la dérivée.

Correction 1 –

1. $D_f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\exp(xy) + x^2 y \exp(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \exp(xy)$$

2. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ ou } y \neq 0\}$ (remarquer qu'on a toujours $x + \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 0$ car $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2}$$

3. $D_f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin x \cos x = \sin(2x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\sin y \cos y = -\sin(2y)$$

4. $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geqslant 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\sqrt{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y\sqrt{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2y^2}{2\sqrt{z}} \quad (z \neq 0)$$

Exercice 2 – Dérivées partielles et directionnelles
Soit f la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = x\cos y + y\exp x$.

1. Calculer ses dérivées partielles.
2. Soit $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculer $D_v f(0,0)$. Pour quelles valeurs de θ cette dérivée directionnelle de f est-elle maximale/minimale ? Que cela signifie-t-il ?

Indications 2 –
Interpréter la dérivée directionnelle à l'aide de l'intersection du graphe de la fonction avec un plan convenable.

Correction 2 – 1.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y\exp x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin y + \exp x.$$

2. Comme est différentiable alors

$$D_v f(0,0) = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

Cette dérivée directionnelle de f est maximale quand $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire quand $\theta = \frac{\pi}{4}$, et minimale quand $\sin\theta = \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire quand $\theta = \frac{5}{4}\pi$.
Signification géométrique : Le plan engendré par le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ et l'axe des z rencontre le graphe $z = f(x, y)$ en une courbe. Cela revient à prendre une tranche du graphe de f dans la direction du vecteur. Cette courbe est de pente maximale en valeur absolue pour $\cos\theta = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\theta = \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Les deux signes s'expliquent par les deux orientations possibles de cette courbe (dans un sens on monte le plus possible, dans l'autre on descend le plus possible).

Exercice 3 – Une fonction puissance
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?
2. Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque distinct de l'origine.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x et à y en $(0, 0)$?

Indications 3 –
On rappelle que $a^b = e^{b\ln(a)}$ pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Utiliser les coordonnées polaires (r, θ) dans le plan et le fait que $\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} r\ln r = 0$.

Correction 3 – 1.

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^x = e^{x\ln(x^2+y^2)} = e^{2r\cos\theta\ln r}.$$

Puisque $\cos\theta$ est borné, $\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} 2r\cos\theta\ln r = 0$ d'où :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x, y) = e^0 = 1,$$

car la fonction exponentielle est continue.

2. Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ les dérivées partielles par rapport aux variables x et y se calculent ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}\right)(x^2 + y^2)^x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right)(x^2 + y^2)^x$$

3. Calculons le taux d'accroissement définissant la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$ (en se limitant au cas $x>0$) :
$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{(x^2)^x-1}{x} = \frac{e^{2x\ln x}-1}{x} \sim \frac{(1+2x\ln x)-1}{x} \sim 2\ln x.$$
Lorsque $x \to 0$, le taux d'accroissement n'a pas une limite finie, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'existe pas en $(0,0)$.
Par contre,
$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \frac{(y^2)^0-1}{y} = 0.$$
Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

Exercice 4 – Dérivées directionnelles

1. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ au point $P(1,0)$ suivant la bissectrice du premier quadrant.
2. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y,z) = x^2-3yz+5$ au point $P(1,2,1)$ dans une direction formant des angles égaux avec les trois axes de coordonnées.
3. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y,z) = xy+yz+zx$ au point $P(2,1,3)$ dans la direction joignant ce point au point $Q(5,5,15)$.

Indications 4 –
Utiliser la formule :
$$D_v f(P) = \langle \operatorname{grad} f(P) \mid v \rangle$$
Pour le vecteur v, certains imposent qu'il soit unitaire (c'est-à-dire de norme 1) d'autres pas.

Correction 4 –
Lorsque f est différentiable alors la différentielle, la dérivée directionnelle, et le gradient encodent la même information et sont reliés par les formules :
$$D_v f(P) = \mathrm{d}f(P)(v) = \langle \operatorname{grad} f(P) \mid v \rangle.$$
Ici nos fonctions f sont de classes $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) en tant que sommes, produits, composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
Il s'agit donc (a) de calculer les dérivées partielles de f et son gradient, (b) de les évaluer au point considéré, (c) d'appliquer la formule selon le vecteur de direction.

1. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$,
$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}\right).$$
Au point $P(1,0)$:
$$\operatorname{grad} f(1,0) = \left(2\cdot 1\cdot e^{1^2+0^2}, 2\cdot 0\cdot e^{1^2+0^2}\right) = (2e,0).$$
La bissectrice du premier quadrant est dirigée par tout vecteur v non nul colinéaire au vecteur $(1,1)$. Si on choisit $v=(1,1)$ alors :
$$D_v f(P) = \langle \operatorname{grad} f(P) \mid v \rangle. = \left\langle \begin{pmatrix} 2e \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2e\cdot 1 + 0\cdot 1 = 2e.$$
Si on préfère faire les calculs avec le vecteur unitaire $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, alors on trouve le résultat précédent avec un facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$:
$$D_v f(P) = \frac{2e}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}e.$$

2. $f(x,y,z) = x^2 - 3yz + 5$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -3z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -3y.$$

Ainsi, le gradient est :

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \big(2x, -3z, -3y\big).$$

En $P = (1,2,1)$:

$$\operatorname{grad} f(1,2,1) = \big(2, -3, -6\big).$$

Un vecteur formant des angles égaux avec les trois axes de coordonnées est $(1,1,1)$, on choisit le vecteur unitaire correspondant $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ et alors :

$$D_v f(P) = \langle \operatorname{grad} f(P) \mid v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \mid \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{7}{\sqrt{3}}.$$

3. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y) \qquad \operatorname{grad} f(2,1,3) = (4,5,3).$$

Le vecteur joignant P à Q est le vecteur $u = (3,4,12)$, sa norme est $\|u\| = \sqrt{3^2+4^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$. Le vecteur unitaire associée est donc $v = \frac{u}{\|u\|} = \big(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\big)$.
Ainsi :

$$D_v f(P) = 4 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{4}{13} + 3 \cdot \frac{12}{13} = \frac{68}{13}.$$

Exercice 5 – Équation aux dérivées partielles
Soit $f(x,y) = \exp\big(\frac{x^2+y^2}{xy}\big)$. Montrer que pour tout (x,y) dans le domaine de définition de f on a l'égalité :

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Indications 5 –
Calculer d'abord les dérivées partielles.

Correction 5 –
Calculons d'abord $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) \exp\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) f(x,y).$$

La fonction étant symétrique en x et y (c'est-à-dire $f(y,x) = f(x,y)$) alors on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right) f(x,y).$$

Ainsi :

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) f(x,y) + \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) f(x,y) = 0.$$

2 Différentielle et fonction $\mathscr{C}^1$

Exercice 6 – Différentielle
Calculer les différentielles des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition :

1. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$
2. $f(x,y) = \ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$

Indications 6 –
Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable en (x_0, y_0), la formule est :

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k) = h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Correction 6 –
Lorsque $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable alors sa différentielle se calcule par la formule :

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k) = h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

On rappelle que $\mathrm{d}f(x_0,y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction linéaire (c'est la fonction linéaire qui approche au mieux f autour de (x_0,y_0)).
Ici nos fonctions f sont différentiables sur leur domaine de définition car de classe $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) en tant que somme, produit, quotient, composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
Il s'agit donc (a) de calculer les dérivées partielles de f, et (b) d'appliquer cette formule.

1. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\sin x\cdot\cos x = \sin(2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\cos y\cdot\sin y = -\sin(2y)$$

Ainsi :

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k) = h\sin(2x_0) - k\sin(2y_0).$$

Par exemple en $(x_0,y_0) = \left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\mathrm{d}f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)(h,k) = \frac{\sqrt{3}}{2}h - k.$$

2. $f(x,y) = \ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$.

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k) = h\cdot\frac{1}{x_0+y_0} - k\cdot\frac{x_0}{y_0(x_0+y_0)}.$$

Exercice 7 – Fonction $\mathscr{C}^1$
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de f. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Indications 7 –
Il est évident que, en tout point (x,y) distinct de l'origine, la fonction f est continue et que les dérivées partielles existent et sont continues. Il suffit de montrer que f est continue en $(0,0)$ et que les dérivées partielles existent et sont continues.

Correction 7 – 1. En dehors de l'origine.
f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que sommes, produits, quotients de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
En plus, en dehors de l'origine,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{f(x,y)}{x} + xy\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{f(x,y)}{x} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{f(x,y)}{y} + xy\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{f(x,y)}{y} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

2. Continuité à l'origine.
Puisque $\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$ est borné,

$$|f(x,y)| \leqslant |xy| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

d'où f est continue en $(0,0)$.
3. Dérivées partielles à l'origine.
Comme $\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
4. Continuité des dérivées partielles à l'origine.
Puisque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

il s'ensuit que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = 0, \qquad \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0,$$

d'où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.
5. Conclusion.
Les dérivées partielles existent et sont continues, ce qui est la définition de f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 8 – Étude du caractère $\mathscr{C}^1$
Étudier la continuité, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles premières, des fonctions suivantes :

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Correction 8 –
De façon générale une somme, produit, quotient, composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est encore de classe $\mathscr{C}^1$ (c'est-à-dire les dérivées partielles existent et sont continues). Il s'agit donc d'étudier le caractère $\mathscr{C}^1$ juste aux points problématiques.

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il y a deux sortes de problèmes : d'une part l'origine car la fonction y est définie « à la main », mais d'autre part il y a une valeur absolue. La valeur absolue est une fonction continue partout, mais non dérivable à l'origine.

(a) Continuité en dehors de l'origine.

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ f est continue comme sommes, produits, quotients de fonctions continues.

(b) Continuité en $(0,0)$.

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos\theta|\sin\theta|}{r} = r\cos\theta|\sin\theta|$$

Donc $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leqslant r \xrightarrow[r\to 0]{} f(0,0) = 0$ et donc f est continue à l'origine.

(c) Dérivées partielles en dehors de l'origine et de $(y=0)$.

En tout point (x_0, y_0) où $y_0 \neq 0$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ car $y \mapsto |y|$ est dérivable en dehors de l'origine.

Pour $y \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{|y|y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\mathrm{sgn}(y)x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

On a noté $\mathrm{sgn}(y) = \frac{y}{|y|}$ le signe $+1$ ou -1 d'un réel $y \neq 0$.

(d) Dérivées partielles aux points $(x_0, 0)$.

$$\frac{f(x_0+h,0)-f(x_0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \quad \text{donc } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0.$$

Pour l'autre dérivée partielle, on calcule le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x_0,0+k)-f(x_0,0)}{k} = \frac{|k|}{k}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+k^2}}$$

Si $x_0 = 0$, alors ce taux d'accroissement est nul et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Mais si $x_0 \neq 0$, $\frac{|k|}{k}$ n'a pas de limite en 0, donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'existe pas en $(x_0, 0)$ pour $x_0 \neq 0$.

Comme une des dérivées partielles n'existe pas en $(x_0, 0)$ pour $x_0 \neq 0$, f n'y est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

(e) La fonction est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ à l'origine ?

Si on évalue $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ le long du chemin $\gamma(t) = (0,t)$ on s'aperçoit que lorsque $t \to 0^+$ cette dérivée partielle tend vers 1 et donc pas vers $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Ainsi la première dérivée partielle n'est pas continue à l'origine. Conclusion : f n'est pas $\mathscr{C}^1$ à l'origine.

On montrerait de même, si on en avait besoin, que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue à l'origine.

2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Le seul point problématique est l'origine.

(a) Continuité en $(0,0)$.

On prouve la continuité à l'origine en utilisant que $\sin(x) = x + o(x^2)$ et $\sin(y) = y + o(y^2)$, donc

$$f(x,y) = \frac{xy + o(xy^2) - xy + o(x^2y)}{x^2+y^2} = \frac{o(xy^2)+o(x^2y)}{x^2+y^2} = \frac{o(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$$

Donc f est continue en $(0,0)$.

Quelques explications : on sait que $x \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ et $y \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, donc $o(x)$ et $o()y$ sont aussi des $o(r)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Ainsi $xy^2 \leqslant r^{3/2}$, donc $o(xy^2)$ est à fortiori un $o(x^2+y^2)$. De même $o(x^2y)$ est aussi un $o(x^2+y^2)$. Enfin par définition $\frac{o(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 0$.

(b) Dérivées partielles en dehors de l'origine.
Pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y^2-x^2)\sin y - y(x^2+y^2)\cos x + 2xy\sin x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(y^2-x^2)\sin x + x(x^2+y^2)\cos y - 2xy\sin y}{(x^2+y^2)^2}.$$

(c) Dérivées partielles à l'origine.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

(d) La fonction est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?
On procède comme pour la continuité :

$$\begin{aligned}
&(y^2-x^2)\sin y - y(x^2+y^2)\cos x + 2xy\sin x \\
&= (y^2-x^2)(y+o(y^2)) - y(x^2+y^2)(1+o(x)) + 2xy(x+o(x^2)) \\
&= (y^2-x^2)o(y^2) - y(x^2+y^2)o(x) + 2xyo(x^2) \\
&= o(r^4)
\end{aligned}$$

Où on a utilisé que $o(x)$ et $o()y$ sont aussi des $o(r)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et donc cette dérivée partielle est continue à l'origine.
Il en est de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$. Conclusion : f est $\mathscr{C}^1$ à l'origine et donc sur $\mathbb{R}^2$.

3 Contre-exemples

Exercice 9 – Normes
Montrer que pour une norme N sur $\mathbb{R}^2$, les dérivées partielles n'existent pas en $(0,0)$.

Indications 9 –
Revenir à la définition de la dérivée partielle $\frac{\partial N}{\partial x}(0,0)$ à l'aide du taux d'accroissement.

Correction 9 –
Supposons un instant que N ait des dérivées partielles à l'origine, alors

$$\frac{\partial N}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{N(h,0)-N(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{N(h,0)}{h}.$$

Voyons si cette limite existe vraiment. Par homogénéité, $N(h,0) = |h| \cdot N(1,0)$, donc :

$$\frac{N(h,0)}{h} = \frac{|h|}{h} N(1,0) = \begin{cases} +N(1,0) & \text{si } h > 0, \\ -N(1,0) & \text{si } h < 0. \end{cases}$$

Mais, par positivité de la norme, $N(1,0) \neq 0$, donc $\frac{N(h,0)}{h}$ ne peut pas avoir de limite lorsque $h \to 0$.
Ainsi la dérivée partielle de N par rapport à x en $(0,0)$ n'existe pas.

Exercice 10 – Dérivées partielles d'une fonction non continue
On définit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ et $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ bien que f ne soit pas continue en $(0,0)$.

Indications 10 –
Il faut calculer les dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, les dérivées partielles en $(0,0)$ puis montrer que f n'est pas continue à l'origine.

Correction 10 –

1. Dérivées partielles en dehors de l'origine.
   Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est différentiable car elle est de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que somme, produit, quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
   On calcule donc les dérivées partielles en $(x,y) \neq (0,0)$:
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - x y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
2. Dérivées partielles à l'origine.
   Comme f est définie comme un cas particulier à l'origine, on calcule la dérivée partielle en $(0,0)$ en revenant à la définition, via un taux d'accroissement :
   $$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{h \cdot 0}{h^2+0^2} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$
   Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Par symétrie, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
   Ainsi f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Non-continuité à l'origine.
   Sur le chemin $\gamma_1(t) = (t,0)$, $f(t,0) = \frac{0\cdot t}{t^2} = 0$, et sur $\gamma_2(t) = (t,t)$, $f(t,t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$. Lorsque $t \to 0$ les deux limites sont différentes, donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Conclusion : on sait que pour une fonction d'une variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si f est dérivable, alors f est continue. L'exemple de cet exercice prouve que ce n'est pas le cas pour les fonctions de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui admet des dérivées partielles. Pour garantir la continuité il faudrait que f soit différentiable ou bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 – Dérivées partielles sans différentiabilité
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y + x y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Montrer que f est continue en $(0,0)$ et admet des dérivées partielles et même des dérivées directionnelles dans toutes les directions, mais n'y est pas différentiable.

Correction 11 –

1. f est continue à l'origine.
   On passe en coordonnées polaires :
   $$\left|f(r\cos\theta, r\sin\theta)\right| = \frac{r^3 |\cos^2\theta \sin\theta + \cos\theta \sin^2\theta|}{r^2} \leqslant 2r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$
   Donc la limite de f en $(0,0)$ vaut bien $f(0,0)$.
2. f admet des dérivées partielles.
   En dehors de l'origine f est différentiable (et même $\mathscr{C}^1$) donc y admet des dérivées partielles. Comme f est définie comme un cas particulier à l'origine, on calcule la dérivée partielle en $(0,0)$ via le taux d'accroissement :
   $$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0}{h^2} \xrightarrow[h\to 0]{} 0, \qquad \text{donc} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$
   De même, comme $f(y,x) = f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
   Donc les deux dérivées partielles existent.

3. f admet des dérivées directionnelles.
   Si on note $v = (h,k)$ un vecteur unitaire, alors $h^2 + k^2 = 1$, et
   $$\frac{f(0+th,0+tk)-f(0,0)}{t} = \frac{t^3h^2k + t^3hk^2}{t^3(h^2+k^2)} = h^2k + hk^2.$$
   Ainsi
   $$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+th,0+tk)-f(0,0)}{t} = h^2k + hk^2.$$
   On retrouve bien sûr comme cas particuliers avec $(h,k) = (1,0)$ et $(h,k) = (0,1)$ que les deux dérivées partielles sont nulles à l'origine.
4. f n'est pas différentiable.
   Supposons par l'absurde que f soit différentiable, alors la différentielle en $(0,0)$ s'exprime avec les dérivées partielles :
   $$\mathrm{d}f(0,0)(h,k) = h\cdot\frac{\partial}{\partial x}f(0,0) + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}f(0,0) = h\cdot 0 + k\cdot 0 = 0$$
   Nous avons donc le candidat à être la différentielle, c'est la fonction nulle $(h,k)\mapsto \ell(h,k) = 0$, mais est-ce qu'elle convient ? En effet pour être différentiable en $(0,0)$, f doit vérifier :
   $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\ell(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$
   Notons $g(h,k)$ ce quotient :
   $$g(h,k) = \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\ell(h,k)}{\|(h,k)\|} = \frac{\frac{h^2k+hk^2}{h^2+k^2} - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2k+hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$
   Le long de $\gamma_1(t) = (t,t)$, $g(t,t) = \frac{2t^3}{(2t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc g ne tend vers 0 à l'origine. Conclusion : f n'est pas différentiable à l'origine.
   Une autre méthode : par l'absurde si f était différentiable alors pour n'importe quel vecteur $v = (h,k)$, on aurait
   $$D_v f(0,0) = h\cdot\frac{\partial}{\partial x}f(0,0) + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)$$
   Et donc ici on aurait $D_v f(0,0) = 0$. Prenons $v = (h,k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, on a vu à la question précédente que $D_v f(0,0) = h^2k + hk^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ ce qui fournit la contradiction.

Corrections : Arnaud Bodin. Relecture : Axel Renard.