Systèmes différentiels

Nous allons voir comment des méthodes d'algèbre linéaire permettent de résoudre des problèmes d'analyse.
Dans ce chapitre, les matrices sont à coefficients réels ou complexes.

1. Cas d'une matrice diagonalisable

1.1. Introduction

Vous savez résoudre les équations différentielles du type $x'(t) = ax(t)$, où la dérivée $x'(t)$ est liée à la fonction $x(t)$. Par exemple, si a est une constante, les fonctions solutions sont les $x(t) = x_0e^{at}$ (où $x_0 \in \mathbb{R}$). Plus généralement, on apprend à résoudre les équations $x'(t) = a(t)x(t)+b(t)$ où a et b sont des fonctions de t. Dans tous les cas, l'exponentielle joue un rôle central dans l'écriture des solutions.
Considérons maintenant le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & a\,x(t)+b\,y(t) \\ y'(t) & = & c\,x(t)+d\,y(t) \end{array}\right. \tag{S}$$

La situation se complique car les équations sont enchevêtrées : $x'(t)$ est liée à $x(t)$, mais aussi à $y(t)$. Donc il faudrait d'abord trouver $y(t)$ pour résoudre la première équation. Mais, dans la seconde équation, $y'(t)$ est liée à $y(t)$, mais aussi à $x(t)$, que l'on n'a pas encore su trouver !
Pour s'en sortir, la solution consiste à considérer le couple $(x(t), y(t))$ comme une seule variable. On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel (S) s'écrit alors simplement :

$$X'(t) = AX(t).$$

On a alors envie de dire que, comme pour une équation du type $x'(t) = ax(t)$, les solutions de ce type d'équation seraient les fonctions définies par

$$X(t) = e^{tA} \cdot X_0$$

(où $X_0 \in \mathbb{R}^2$) et ce sera effectivement le cas, une fois que l'on aura défini ce qu'est l'exponentielle d'une matrice !
Pour l'instant, nous allons voir comment résoudre un système différentiel dans le cas particulier où la matrice est diagonalisable.

1.2. Écriture matricielle

Un *système différentiel linéaire homogène* est un système d'équations différentielles de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\cdots+a_{1n}x_n(t) \\ \vdots & & \\ x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\cdots+a_{nn}x_n(t) \end{array}\right. \qquad (S)$$

où les a_{ij} $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ sont des coefficients constants réels ou complexes.
On pose

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad X'(t)=\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Avec cette notation matricielle, le système différentiel (S) devient :

$$\boxed{X'(t)=AX(t).}$$

Résoudre le système linéaire $X'=AX$, avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ (ou $A \in M_n(\mathbb{C})$) une matrice constante, c'est donc trouver $X(t)$ dérivable (c'est-à-dire n fonctions $x_1(t),\dots,x_n(t)$ dérivables) tel que $X'(t)=AX(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Remarque.

- Dans le cas $n=1$, on retrouve simplement une seule équation que l'on écrit $x'(t)=ax(t)$ et dont les solutions sont les $x(t)=x_0e^{at}$, pour n'importe quelle constante (réelle ou complexe) x_0.
- L'ensemble des solutions est un espace vectoriel. En effet, on prouve facilement que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$: la fonction identiquement nulle est solution et, si X_1 et X_2 sont solutions, alors $\lambda X_1+\mu X_2$ est aussi solution (avec $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$).

Exemple 1 (Système diagonal).
Si A est une matrice diagonale à coefficients réels, alors le système s'écrit $X'=AX$ avec

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & \lambda_1x_1(t) \\ \vdots & & \\ x_n'(t) & = & \lambda_nx_n(t). \end{array}\right.$$

On résout indépendamment chaque équation $x_i'(t)=\lambda_ix_i(t)$, dont les solutions sont les $x_i(t)=k_ie^{\lambda_it}$, $k_i \in \mathbb{R}$. Les solutions $X(t)$ sont donc les fonctions

$$X(t)=\begin{pmatrix} k_1e^{\lambda_1t} \\ \vdots \\ k_ne^{\lambda_nt} \end{pmatrix}$$

où $k_1,\dots,k_n$ sont des constantes réelles.

Exemple 2 (Système triangulaire).
Un système triangulaire n'est pas tellement plus compliqué à résoudre. En effet, si A est une matrice

triangulaire, on a :

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + \cdots + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots & \\ x_n' &= \qquad\qquad a_{nn}x_n \end{cases}$$

On résout le système de proche en proche : on peut d'abord intégrer la dernière équation, puis reporter la solution dans l'équation précédente (qui devient une équation du type $x'(t) = ax(t) + b(t)$) et ainsi en remontant intégrer tout le système.

1.3. Cas diagonalisable

Voici un premier résultat qui affirme que si on connaît un vecteur propre de A, alors on peut lui associer une solution du système différentiel.

Proposition 1.
Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé. Alors la fonction

$$X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t}V \end{array}$$

est solution du système différentiel $X' = AX$.

Démonstration. Soit $X(t) = e^{\lambda t}V$. On a alors

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}(\lambda V) = e^{\lambda t}AV = AX(t).$$

Cela prouve que $X(t)$ est bien solution du système homogène $X' = AX$. □

Exemple 3.
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A(X) = (X-2)^2$, la seule valeur propre de A est donc $\lambda = 2$. Déterminons un vecteur propre : soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tel que $A \cdot V = 2V$; on a alors $x + y = 0$, et le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A. Ainsi l'application $X(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$ est une solution du système $X' = AX$, ce que l'on vérifie aussi à la main.

Théorème 1.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Notons $(V_1, \ldots, V_n)$ une base de vecteurs propres et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes. Alors les fonctions $X_i(t) = e^{\lambda_i t}V_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ forment une base de l'espace des solutions du système $X' = AX$.

Démonstration.

- Tout d'abord, par la proposition 1, les $X_i(t) = e^{\lambda_i t}V_i$ sont bien des solutions du système différentiel.
- Montrons que ces solutions sont linéairement indépendantes. Soient $c_1, \ldots, c_n$ des réels tels que

  $$c_1X_1(t) + \cdots + c_nX_n(t) = 0.$$

  Cette égalité étant vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, elle est vraie en particulier pour $t = 0$ où elle devient

  $$c_1V_1 + \cdots + c_nV_n = 0.$$

  Cela implique $c_1 = \cdots = c_n = 0$ car les V_i forment une base de $\mathbb{R}^n$.

- Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $V_1, \ldots, V_n$. Alors la matrice $P^{-1}AP = D$ est diagonale.
- Soit $X(t)$ une solution du système différentiel $X' = AX$. La matrice de passage P étant inversible, notons $Y = P^{-1}X$ (donc $X = PY$). Alors $Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = DY$. Ainsi Y est la solution d'un système différentiel diagonal :
$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1' &=& \lambda_1 y_1 \\ \vdots && \\ y_n' &=& \lambda_n y_n \end{array}\right. \qquad \text{d'où} \quad Y(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$
Comme les colonnes de P sont les vecteurs $V_1, \ldots, V_n$, alors
$$X(t) = PY(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + k_n e^{\lambda_n t} V_n = k_1 X_1(t) + \cdots + k_n X_n(t).$$
On vient de prouver que n'importe quelle solution $X(t)$ est combinaison linéaire des $X_i(t)$. Ainsi la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ est génératrice de l'espace des solutions.
- Conclusion : $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de solutions. □

Exemple 4.
On veut résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec $X(0) = X_0$ où
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- **Valeurs propres et vecteurs propres.**
Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 5$. Les vecteurs propres associés sont
$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
- **Solutions générales.**
Nous obtenons trois solutions
$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \qquad X_2(t) = e^{\lambda_2 t} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad X_3(t) = e^{\lambda_3 t} V_3 = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Les solutions du système $X' = AX$ sont donc les fonctions de la forme
$$X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t) + \gamma X_3(t)$$
avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
- **Condition initiale.**
On cherche quelle solution vérifie en plus $X(0) = X_0$. Or
$$X(0) = \alpha X_1(0) + \beta X_2(0) + \gamma X_3(0) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}.$$
La condition initiale $X(0) = X_0$ se transforme donc en le système linéaire :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \gamma &=& 1 \\ \alpha + \beta + \gamma &=& 2 \\ \alpha + \beta &=& 3 \end{array}\right.$$

On trouve $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$. Ainsi l'unique solution qui vérifie le système et la condition initiale est

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Mini-exercices.

1. Résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 : $x'(t) = -3x(t)$. Trouver la solution vérifiant $x(0) = 1$. Idem avec $x'(t) + x(t) = \cos t$, puis $x'(t) + x(t) = te^t$.
2. Résoudre le système différentiel $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Même question avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. En déduire les solutions du système différentiel $X' = AX$.
4. Trouver les solutions du système différentiel $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Exponentielle de matrices

2.1. Rappels

Avant de définir l'exponentielle de matrices, voici quelques petits rappels sur l'exponentielle réelle ou complexe. Tout d'abord, pour $z \in \mathbb{C}$, l'exponentielle peut être définie par une série :

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

On la note aussi e^z. Retenons quelques propriétés principales :

1. $\exp(0) = 1$,
2. $\exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$ $(\forall z, z' \in \mathbb{C})$,
3. $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ $(\forall z \in \mathbb{C})$,
4. $\exp(kz) = (\exp(z))^k$ $(\forall z \in \mathbb{C},\ \forall k \in \mathbb{Z})$.

Une autre propriété essentielle est que l'exponentielle définit une fonction dérivable et (pour $a \in \mathbb{C}$) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(at) = a \exp(at).$$

L'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ étant un espace vectoriel de dimension finie sur lequel toutes les normes sont équivalentes, on en choisit une que l'on note $\|\cdot\|$. Par exemple, $\|A\| = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(|a_{ij}|)$.

Rappels : Rappelons la définition d'une série. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Si cette suite admet une limite, quand n tend vers l'infini, on dit que la série converge et on note $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa limite.

Nous allons maintenant définir ce qu'est l'exponentielle d'une matrice.

2.2. Exponentielle de matrices

La série de terme général $\frac{1}{k!}a^k$ étant convergente pour tout $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{1}{k!}\|A\|^k$ est également convergente pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k$ est convergente dans $M_n(\mathbb{R})$.

Théorème 2.
Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{A^k}{k!}$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$. On note

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

sa limite. C'est **la matrice exponentielle de A**.

Notation : on la note aussi e^A.
Ce théorème est aussi valable pour l'exponentielle d'une matrice complexe $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Voici deux exemples simples, mais importants pour la suite.
Exemple 5 (Exponentielle d'une matrice diagonale)**.**
Si A est la matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \text{alors} \qquad A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

et donc

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 6 (Exponentielle d'une matrice nilpotente)**.**
Rappelons qu'une matrice A est ***nilpotente*** s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que A^N soit la matrice nulle. Pour une telle matrice nilpotente, $\exp(A)$ est ainsi une ***somme finie*** :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!}.$$

2.3. Propriétés

L'exponentielle de matrices (réelles ou complexes) vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 2 (Propriétés de l'exponentielle)**.**

1. *Si on note O_n la matrice nulle, alors $\exp(O_n) = I_n$.*
2. *Si A et $B \in M_n(\mathbb{R})$ (ou $M_n(\mathbb{C})$) vérifient $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\cdot\exp(B)$.*
3. *Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ (ou $M_n(\mathbb{C})$), la matrice $\exp(A)$ est inversible et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.*
4. *$\exp(kA) = (\exp(A))^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

Remarque.
Attention ! Si A et B ne commutent pas, alors, en général, $\exp(A+B) \neq \exp(A) \cdot \exp(B)$.

Nous ne démontrerons pas ces propriétés, mais nous pouvons cependant faire les remarques suivantes :

- Le 1 est évident.
- Le 2 se démontre comme dans le cas de l'exponentielle complexe, le fait que les matrices commutent permettant d'utiliser la formule du binôme de Newton.
- Pour le 3, on remarque que les matrices A et $-A$ commutent, d'où
$$\exp(A) \cdot \exp(-A) = \exp(A-A) = \exp(0_n) = I_n.$$
- Pour le 4, c'est d'abord une récurrence sur $k \geqslant 0$, puis on utilise le 3 pour obtenir la propriété pour $k \leqslant 0$.

2.4. Calculs

Le calcul de l'exponentielle d'une matrice peut s'effectuer en se ramenant aux calculs de l'exponentielle d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente. On se ramènera à une telle situation par le résultat suivant :

> **Lemme 1.**
> *Si A, $P \in M_n(\mathbb{C})$, et P est inversible, on a* $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.

Démonstration. On note que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k$ et l'on revient à la définition de l'exponentielle :
$$\exp(P^{-1}AP) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} P^{-1}A^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k\right) P = P^{-1}\exp(A)P.$$
□

Méthode de calcul de $\exp(A)$**.**

- Si A est diagonale ou nilpotente, il n'y a pas de problème (voir avant).
- Sinon on utilise la décomposition de Dunford $A = \Delta + N$ avec Δ diagonalisable, N nilpotente et $N\Delta = \Delta N$, ce qui permet d'écrire $\exp(A) = \exp(\Delta) \cdot \exp(N)$. La matrice Δ étant diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}\Delta P$ soit diagonale, soit encore $\Delta = PDP^{-1}$, d'où
$$\exp(\Delta) = \exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}.$$

On peut donc toujours calculer l'exponentielle d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Exemple 7.
Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- **Décomposition de Dunford.**
La décomposition de Dunford est $A = D + N$ avec
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ici D est déjà une matrice diagonale puisque $D = 2I_3$, ce qui va simplifier les calculs.

- **La matrice diagonale.**

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = e^2 I$$

- **La matrice nilpotente.**
La matrice N est nilpotente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = 0.$$

Ainsi

$$\exp(N) = I + N + \frac{1}{2!}N^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- **Exponentielle de A.**

$$\exp(A) = \exp(D) \cdot \exp(N) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^2 & -\frac{1}{2}e^2 \\ \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^2 & -\frac{3}{2}e^2 \\ -e^2 & e^2 & 2e^2 \end{pmatrix}$$

Exemple 8.
Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

- **Décomposition de Dunford.**
La décomposition de Dunford est $A = \Delta + N$ avec

$$\Delta = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ \frac{25}{2} & 6 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- **La matrice nilpotente.**
La matrice N est nilpotente, avec N^2 la matrice nulle. Ainsi $\exp(N) = I + N$.
- **La matrice diagonalisable.**
La matrice Δ se transforme en une matrice diagonale par $D = P^{-1}\Delta P$ où

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{25}{13} & -\frac{24}{13} \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{24} & 1 & \frac{13}{24} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{25}{24} & 0 & -\frac{13}{24} \end{pmatrix}.$$

Comme $\Delta = PDP^{-1}$ alors $\exp(\Delta) = \exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}$:

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^6 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-6} \end{pmatrix} \qquad \exp(\Delta) = \begin{pmatrix} e^{-6} & 0 & 0 \\ \frac{25}{24}(e^6 - e^{-6}) & e^6 & \frac{13}{24}(e^6 - e^{-6}) \\ 0 & 0 & e^{-6} \end{pmatrix}$$

- **Exponentielle de A.**

$$\exp(A) = \exp(\Delta) \cdot \exp(N) = \begin{pmatrix} 2e^{-6} & 0 & e^{-6} \\ \frac{1}{24}(25e^6 - 37e^{-6}) & e^6 & \frac{1}{24}(13e^6 - 25e^{-6}) \\ -e^{-6} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.5. Dérivée

Si $M(t)$ est une matrice dont les coefficients $a_{ij}(t)$ sont des fonctions dérivables de la variable t, alors la dérivée de $A(t)$ est la matrice $A'(t)$ dont les coefficients sont les dérivées $a'_{ij}(t)$. La dérivée d'une matrice vérifie les propriétés usuelles des dérivées. En particulier, elle vérifie que, si les matrices $M(t)$ et $N(t)$ sont dérivables, alors le produit aussi et on a (attention à l'ordre des produits !) :

$$(MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t).$$

Proposition 3.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. L'application de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable et on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\exp(tA)\big) = A\exp(tA).$$

Remarque : comme les matrices A et $\exp(tA)$ commutent, alors on a aussi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA) = \exp(tA)A$.

Démonstration. Notons

$$E(t) = \exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} E_k(t)$$

où $E_k(t) = \frac{1}{k!} t^k A^k$. On a $E'_0(t) = 0$ et, pour tout $k > 0$,

$$E'_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^k = AE_{k-1}(t).$$

Pour des raisons de convergence normale, comme dans le cas des séries de fonctions, on a

$$E'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} E'_k(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} AE_{k-1}(t) = AE(t).$$

□

Mini-exercices.

1. Vérifier que $\exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ pour tout t réel.
2. Montrer que, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\det(\exp(A)) = e^{\operatorname{tr} A}$. Commencer par le cas où A est triangulaire.
3. Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A = \Delta + N$ est la décomposition de Dunford de A. Calculer $\exp(\Delta)$, $\exp(N)$ et $\exp(A)$.

3. Systèmes différentiels linéaires

Nous revenons à notre problème : résoudre le système différentiel $X' = AX$, où A est une matrice carrée quelconque. Nous allons voir comment utiliser les propriétés de l'exponentielle de matrices et la réduction des matrices carrées pour écrire les solutions.

3.1. Solutions des systèmes homogènes

Théorème 3.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Les solutions du système différentiel homogène $X' = AX$ sont les fonctions $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définies par

$$X(t) = \exp(tA) \cdot X_0$$

où X_0 est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ quelconque.

Remarque.
- En particulier, les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- Ce théorème est aussi vrai sur $\mathbb{C}$.
- Il est clair que $X(0) = X_0$.

Tirons deux conséquences importantes de ce théorème. La première est que si on impose une condition initiale, alors on a existence et unicité de la solution.

Corollaire 1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz).
Pour $X_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé, il existe une et une seule solution $X(t)$ vérifiant le système différentiel $X' = AX$ et la condition initiale $X(0) = X_0$.

Seconde conséquence : comme à chaque $X_0 \in \mathbb{R}^n$ on associe une unique solution, alors l'espace vectoriel des solutions est aussi de dimension n.

Corollaire 2.
L'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$ (avec $A \in M_n(\mathbb{R})$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Preuve du théorème.
- D'une part, la dérivée de $\exp(tA)$ est $A\exp(tA)$, donc $X(t) = \exp(tA) \cdot X_0$ est bien solution de l'équation $X' = AX$.
- Réciproquement, si on pose $Y(t) = \exp(-tA)X(t)$, alors
$$Y'(t) = \exp(-tA)(X' - AX) = 0.$$
Donc, sur $\mathbb{R}$, Y est une fonction constante que l'on note $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Ainsi $X(t) = \exp(tA) \cdot X_0$ pour tout t.

□

3.2. Méthode

Dans la pratique, que fait-on ?

1. **Forme des solutions.**
Il s'agit d'intégrer l'équation $X' = AX$ dont les solutions s'écrivent
$$X(t) = \exp(tA) \cdot X_0 \quad \text{avec} \quad X_0 \in \mathbb{R}^n.$$
2. **Réduction à la forme $D + N$.**
Si le polynôme caractéristique de A est scindé (ce qui est toujours vrai sur $\mathbb{C}$), alors la décomposition de Dunford permet d'écrire A sous la forme « diagonalisable + nilpotente ». Autrement

dit, il existe une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP = D + N$ avec D diagonale, N nilpotente et $ND = DN$.

On note cette matrice $B = P^{-1}AP = D + N$.

3. **Équation en Y.**

Posons $Y = P^{-1}X$ (donc $X = PY$). L'équation $X' = AX$ devient une équation de Y' :

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = BY.$$

4. **Solutions en Y.**

Les solutions $Y(t)$ sont donc de la forme $Y(t) = \exp(tB)V$ où $V \in \mathbb{R}^n$. De plus, $\exp(tB) = \exp(tD + tN) = \exp(tD) \cdot \exp(tN)$ et les matrices $\exp(tD)$ et $\exp(tN)$ sont faciles à calculer puisque D est diagonale et N est nilpotente.

5. **Solutions en X.**

On obtient alors $X = PY = P\exp(tB)V$ $(V \in \mathbb{R}^n)$. Ainsi, les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de la forme

$$X(t) = P\exp(tD) \cdot \exp(tN)V \qquad \text{avec } \; V \in \mathbb{R}^n$$

et il est inutile de calculer la matrice P^{-1}.

3.3. Exemple

Exemple 9.

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) - 3x_3(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) - x_2(t) - 6x_3(t) \\ x_3'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + 5x_3(t) \end{cases}$$

avec pour « conditions initiales » : $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0$.

1. **Forme des solutions.**

La matrice du système différentiel est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Les solutions du système $X' = AX$ sont les $X(t) = \exp(tA)X_0$. Ici la condition initiale est $X_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

2. **Réduction à la forme $D + N$.**

La décomposition de Dunford de A s'écrit ici $P^{-1}AP = D + N$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -3 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

D est bien diagonale ; N est nilpotente, car $N^2 = 0$; et $DN = ND$.

3. **Équation en Y.**

Posons $Y = P^{-1}X$ (donc $X = PY$). Posons $B = P^{-1}AP = D + N$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

L'équation $X' = AX$ devient une équation de Y : $Y' = BY$.

4. **Solutions en Y.**
Les solutions de $Y' = BY$ sont les $Y(t) = \exp(tB)V$, $V \in \mathbb{R}^n$.

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \qquad \exp(tN) = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3t+1 & 3t \\ 0 & -3t & 3t+1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\exp(tB) = \exp(tD + tN) = \exp(tD) \cdot \exp(tN) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & (-3t+1)e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & -3te^{2t} & (3t+1)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

5. **Solutions en X.**
Les solutions du système $X' = AX$ sont les

$$X(t) = P\exp(tB)V = \begin{pmatrix} e^t & (-3t+1)e^{2t} & 3te^{2t} \\ \frac{1}{2}e^t & -3te^{2t} & (3t+1)e^{2t} \\ 0 & (t+\frac{2}{3})e^{2t} & -(t+1)e^{2t} \end{pmatrix} \cdot V.$$

6. **Solution en X avec condition initiale.**
On veut $X(0) = X_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Mais, en $t = 0$, la solution $X(t) = P\exp(tB)V_0$ conduit à $X(0) = PV_0$, d'où $V_0 = P^{-1}X_0$. On trouve

$$V_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors $X(t) = P\exp(tB)V_0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1(t) &= (-3t+3)e^{2t} - 2e^t \\ x_2(t) &= (-3t+2)e^{2t} - e^t \\ x_3(t) &= te^{2t}. \end{cases}$$

Mini-exercices.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Trouver l'expression de la solution du système $X' = AX$ vérifiant $X(t_0) = X_0$.
2. Prouver ce résultat du cours : « L'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$ (avec $A \in M_n(\mathbb{R})$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. »
3. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Trouver la décomposition de Dunford de A. Résoudre le système différentiel $X' = AX$. Trouver la solution vérifiant $X(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
4. Soient
$$A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad D = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right), \quad P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -8 \end{smallmatrix}\right).$$
Montrer que $P^{-1}AP = D + N$ correspond à la décomposition de Dunford de A. Calculer $\exp(tD)$, $\exp(tN)$ et $\exp(tA)$. Résoudre le système différentiel $X' = AX$. Trouver la solution vérifiant $X(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

4. Équations différentielles linéaires

Nous allons voir comment des méthodes d'algèbre linéaire permettent de résoudre des équations différentielles linéaires d'ordre n.

4.1. Équations différentielles linéaires d'ordre 2

On souhaite intégrer l'équation différentielle

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = 0 \tag{E}$$

où p et q sont des constantes réelles. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'inconnue est la fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la variable t, qui doit être deux fois dérivable.

Quel est le lien avec nos systèmes différentiels ? On se ramène à l'étude des systèmes du paragraphe précédent en posant $y = x'$. L'équation différentielle (E) est alors équivalente au système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -qx - py \end{cases}$$

En effet, la première équation $x' = y$ implique en particulier $x'' = y'$, donc la deuxième équation devient l'équation (E) $x'' = -qx - px'$. On vient donc de justifier le résultat suivant :

Proposition 4.
La fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle

$$x'' + px' + qx = 0$$

si et seulement si l'application $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

est solution du système $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}.$$

Par le corollaire 2, on a alors :

Corollaire 3.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x''(t)+px'(t)+qx(t) = 0$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Comment trouver les solutions ?
Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = X^2 + pX + q$. Notons λ_1 et λ_2 les racines de χ_A. Ce sont les valeurs propres de la matrice A, et il est donc naturel que les solutions fassent intervenir ces racines.
Soit λ une racine du polynôme caractéristique : λ est valeur propre de la matrice A. Soit $V = \binom{v_1}{v_2}$ un vecteur propre associé à cette valeur propre. Alors, par la proposition 1, la fonction

$$X(t) = e^{\lambda t} V$$

est solution du système différentiel $X' = AX$, donc $x(t) = v_1 e^{\lambda t}$ est solution de l'équation différentielle $x''(t) + px'(t) + qx(t) = 0$.

Théorème 4.
Soit l'équation différentielle $x''(t)+px'(t)+qx(t)=0$ et son équation caractéristique $X^2+pX+q=0$, où $p,q\in\mathbb{R}$.

- *Si λ_1 et λ_2 sont deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique, les solutions de l'équation différentielle sont les :*
$$\alpha e^{\lambda_1 t}+\beta e^{\lambda_2 t}\qquad(\alpha,\beta\in\mathbb{R}).$$
- *Si λ_0 est une racine réelle double, les solutions sont les :*
$$(\alpha t+\beta)e^{\lambda_0 t}\qquad(\alpha,\beta\in\mathbb{R}).$$
- *Si $a+\mathrm{i}\,b$ et $a-\mathrm{i}\,b$ sont deux racines complexes conjuguées, les solutions réelles de l'équation différentielle sont les :*
$$e^{at}\big(\alpha\cos(bt)+\beta\sin(bt)\big)\qquad(\alpha,\beta\in\mathbb{R}).$$

Démonstration. La preuve est une simple vérification. On vérifie que les solutions proposées sont bien des solutions (à faire). Ainsi, dans chacun des cas, on trouve que les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2. En conclusion, par le corollaire 3, on a trouvé toutes les solutions. □

Exemple 10.
Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $x''+x=0$?

- **Première méthode.** L'équation caractéristique est $x^2+1=0$, dont les solutions sont $\pm\mathrm{i}$, c'est-à-dire $a=0$ et $b=1$. On trouve deux solutions $x_1(t)=\cos t$ et $x_2(t)=\sin t$. L'ensemble des solutions est alors
$$t\mapsto\alpha\cos t+\beta\sin t\qquad(\alpha,\beta\in\mathbb{R}).$$
On a la certitude qu'il n'y a pas d'autres solutions par le corollaire 3.
- **Seconde méthode.**
Écrivons l'équation sous la forme du système différentiel $X'=AX$ avec
$$X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\x'(t)\end{pmatrix},\qquad X'(t)=\begin{pmatrix}x'(t)\\x''(t)\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$
On retrouve les solutions de notre système précédent via la matrice $\exp(tA)$, c'est-à-dire après calculs
$$\exp(tA)=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix},$$
dont les colonnes sont des solutions linéairement indépendantes du système $X'=AX$. La solution générale s'écrit $X(t)=\exp(tA)X_0$ pour $X_0=\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right)$, ou autrement dit
$$X(t)=\alpha\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}\sin t\\\cos t\end{pmatrix}.$$
Et en particulier $x(t)=\alpha\cos t+\beta\sin t$, avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

4.2. Équations différentielles linéaires d'ordre n

Ce que nous avons fait pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 se généralise aux équations d'ordre n. Le principe est le même. On considère une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=0 \tag{E}$$

où la fonction inconnue est une fonction $t \mapsto x(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivable.
On introduit les fonctions auxiliaires

$$\begin{cases} x_1 &= x \\ x_2 &= x_1' = x' \\ \vdots & \\ x_{n-1} &= x_{n-2}' = x^{(n-2)} \\ x_n &= x_{n-1}' = x^{(n-1)} \end{cases}$$

L'équation (E) se transforme alors en le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ \vdots & \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= -a_1x_n-a_2x_{n-1}-\cdots-a_nx_1 \end{cases}$$

Ainsi résoudre l'équation (E) est équivalent à résoudre le système différentiel

$$X' = AX$$

avec

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \qquad X'(t)=\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

et

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Une reformulation du théorème de Cauchy-Lipschitz (voir corollaire 1) pour les systèmes différentiels devient :

Corollaire 4 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.**
Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ fixés. Il existe une et une seule fonction $x(t)$ qui vérifie

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=0$$

ainsi que toutes les conditions initiales :

$$x(t_0)=c_0, \quad x'(t_0)=c_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0)=c_{n-1}.$$

Attention, les conditions initiales sont bien toutes pour le même paramètre $t=t_0$.
De même, le corollaire 2 devient :

Corollaire 5.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est un espace vectoriel de dimension n.

Un calcul simple de déterminant justifie le lien entre : (a) l'équation différentielle (E), (b) les racines de l'équation caractéristique $\chi_A(X)=0$ et (c) les valeurs propres de A. Voir le paragraphe sur la matrice compagnon d'un polynôme dans le chapitre « Valeurs propres, vecteurs propres ».

Lemme 2.
Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = (-1)^n\big(X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n\big)$$

où les a_i sont les coefficients de l'équation différentielle (E).

On termine par l'énoncé d'un théorème qui donne toutes les solutions.

Théorème 5.
Soit l'équation différentielle

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}x'(t) + a_nx(t) = 0$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ les racines deux à deux distinctes du polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ et $m_1, m_2, \ldots, m_r$ les multiplicités. Autrement dit :

$$\chi_A(X) = (-1)^n\big(X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n\big) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{m_1}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r}.$$

Alors chaque solution $x(t)$ de l'équation différentielle est la partie réelle de

$$\sum_{k=1}^{r} P_k(t)e^{\lambda_k t}$$

pour des polynômes P_k de degré $< m_k$ (pour tout k).

La preuve consiste encore une fois à vérifier que les fonctions proposées sont bien des solutions. Comme l'équation caractéristique est à coefficients réels, si λ_k est une solution complexe alors son conjugué l'est aussi. Ainsi, une base de solutions réelles est donnée par :

- les $P_k(t)e^{\lambda_k t}$ avec $\deg P_k < m_k$, si λ_k est réel ;
- et les $P_k(t)e^{a_k t}\cos(b_k t)$ ainsi que les $P_k(t)e^{a_k t}\sin(b_k t)$ avec $\deg P_k < m_k$, si $\lambda_k = a_k + \mathrm{i}\, b_k$ est complexe.

Exemple 11.
Résoudre l'équation $x''' - 3x'' + 4x = 0$.

- L'équation caractéristique est $X^3 - 3X^2 + 4 = 0$, ce qui s'écrit aussi $(X-2)^2(X+1) = 0$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ (de multiplicité $m_1 = 2$) et $\lambda_2 = -1$ (de multiplicité $m_2 = 1$).
- La valeur propre $\lambda_1 = 2$ conduit aux solutions $(a + bt)e^{2t}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
- La valeur propre $\lambda_2 = -1$ conduit aux solutions ce^{-t} avec $c \in \mathbb{R}$.
- L'ensemble des solutions est donc

$$\big\{t \mapsto (a+bt)e^{2t} + ce^{-t} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\big\}.$$

Exemple 12.
Résoudre l'équation $x''' - 2x'' - 2x' - 3x = 0$.

- L'équation caractéristique est $X^3 - 2X^2 - 2X - 3 = 0$, ce qui s'écrit aussi $(X-3)(X^2+X+1) = 0$. Une valeur propre est donc $\lambda_1 = 3$. Les solutions de $X^2 + X + 1 = 0$ sont $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ et $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
- La valeur propre $\lambda_1 = 3$ conduit à la solution $t \mapsto e^{3t}$.
- Les valeurs propres λ_2 et λ_3 conduisent aux solutions complexes $e^{\lambda_2 t}$ et $e^{\lambda_3 t}$. Comme on s'intéresse aux solutions réelles, alors on considère les deux fonctions définies par la partie réelle et la partie imaginaire de $e^{-\frac{1}{2}t}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,t}$:

$$t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

- L'ensemble des solutions est donc
$$\left\{ t \mapsto ae^{3t} + e^{-\frac{1}{2}t}\left(b\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\right\}.$$

4.3. Suites récurrentes linéaires

La suite de Fibonacci est une suite définie par deux conditions initiales et une relation de récurrence :
$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad u_{k+2} = u_{k+1} + u_k \ \text{ pour } k \geqslant 0.$$
Le premiers termes sont :
$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad \ldots$$
On cherche une formule qui donne directement u_k en fonction de k (et ne dépend donc pas des termes $u_{k-1}, \ldots$). Une première formule s'obtient à l'aide de matrices. Soient
$$X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \end{pmatrix}, \qquad X_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_{k+2} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Alors on a
$$X_{k+1} = AX_k$$
et ainsi, la suite de Fibonacci est aussi définie par :
$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X_k = A^k X_0 \quad (k \geqslant 0).$$
La formule $X_k = A^k X_0$ est une première formule qui permet de calculer directement X_k. Il existe une méthode efficace pour calculer A^k : l'exponentiation rapide.

Mais le but de cette section est de trouver un autre type de formule directe, en faisant l'analogie entre l'équation $X_{k+1} = AX_k$ avec le système différentiel $X' = AX$.

De façon plus générale, on considère une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la relation de récurrence :
$$u_{k+n} + a_1 u_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1}u_{k+1} + a_n u_k = 0 \tag{E}$$
L'analogie est la suivante :
$$\begin{array}{ccc}
u_k & \leftrightsquigarrow & x(t) \\
u_{k+1} & \leftrightsquigarrow & x'(t) \\
u_{k+2} & \leftrightsquigarrow & x''(t) \\
\vdots & & \vdots \\
X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+n-1} \end{pmatrix} & \leftrightsquigarrow & X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \\
X_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_{k+2} \\ \vdots \\ u_{k+n} \end{pmatrix} & \leftrightsquigarrow & X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix} \\
X_{k+1} = AX_k & \leftrightsquigarrow & X'(t) = AX(t)
\end{array}$$

Théorème 6.

Soit la relation de récurrence linéaire :

$$u_{k+n} + a_1 u_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} u_{k+1} + a_n u_k = 0$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ les racines deux à deux distinctes de l'équation caractéristique et $m_1, m_2, \ldots, m_r$ les multiplicités :

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}.$$

Alors les suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence sont exactement les suites de la forme :

$$u_k = P_1(k)\lambda_1^k + \cdots + P_r(k)\lambda_r^k$$

pour des polynômes P_i de degré $< m_i$ (pour tout i).

Remarque.

- Les P_i peuvent être déterminés par $u_0, \ldots, u_{n-1}$.
- Pour $n = 1$, les suites vérifiant $u_{k+1} = a u_k$ sont les suites géométriques. L'équation caractéristique est $X = a$. Elles s'écrivent bien $u_k = u_0 a^k$.

Revenons à la suite de Fibonacci.

Exemple 13.

1. Quelles sont les suites réelles (u_k) vérifiant $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$?
   L'équation caractéristique est $X^2 = X + 1$. Autrement dit $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = 0$, avec $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, chacune de multiplicité 1. Les suites (u_k) sont donc de la forme $u_k = \alpha\lambda_1^k + \beta\lambda_2^k$, c'est-à-dire :
   $$u_k = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \qquad \text{pour } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
2. Quelle suite vérifie en plus $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$?
   Comme $u_0 = \alpha\lambda_1^0 + \beta\lambda_2^0 = \alpha + \beta$, alors la condition initiale $u_0 = 0$ implique $\beta = -\alpha$.
   Comme $u_1 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = \alpha(\lambda_1 - \lambda_2) = \alpha\sqrt{5}$, alors la condition initiale $u_1 = 1$ implique $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   Conclusion : la suite de Fibonacci est la suite définie par
   $$u_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right).$$

Mini-exercices.

1. Trouver les solutions de l'équation différentielle $x'' = x$. Trouver la solution vérifiant $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.
2. Mêmes questions avec $x'' - 2x' + x = 0$. Puis $x'' + 2x' - x = 0$.
3. Trouver les solutions réelles des équations différentielles $x''' = x$, $x''' - 2x'' - x' + 2x = 0$ et $x''' - x'' + x' - x = 0$.
4. Trouver les suites vérifiant la relation de récurrence $u_{k+2} = 3u_{k+1} + 4u_k$. Trouver la suite vérifiant la condition initiale $u_0 = 0$, $u_1 = 1$. Idem avec la relation $u_{k+2} = 2u_{k+1} - u_k$, puis $u_{k+2} = -u_{k+1} - 2u_k$. Idem avec $u_{k+3} - u_{k+2} - 8u_{k+1} + 6u_k = 0$ (sans conditions initiales).

5. Exemples en dimension 2

5.1. Trajectoires

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Les solutions du système $X' = AX$ sont des applications $t \mapsto X(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui peuvent être considérées comme des courbes paramétrées.
Une ***trajectoire*** T du système différentiel $X' = AX$ est (le support de) la courbe paramétrée définie par une solution $X(t) = \left(\begin{smallmatrix} x(t) \\ y(t) \end{smallmatrix}\right)$:

$$T = \Big\{\big(x(t), y(t)\big) \mid t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

La trajectoire associée à $X(t)$ a pour vecteurs tangents les $X'(t)$ et est donc tangente au champ de vecteurs $A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$.
Les trajectoires sont en général des courbes, mais le point d'équilibre $\{(0,0)\}$ constitue à lui tout seul une trajectoire spéciale.

Voici une reformulation géométrique du théorème de Cauchy-Lipschitz (corollaire 1).

Proposition 5.
Les trajectoires du système différentiel $X' = AX$ sont disjointes ou confondues.

Démonstration. Soient X_1 et X_2 deux solutions du système différentiel $X' = AX$, et soient T_1 et T_2 les deux trajectoires associées.
Supposons que $T_1 \cap T_2 \neq \varnothing$. Nous allons montrer qu'alors $T_1 = T_2$. Soit $X_0 \in T_1 \cap T_2$: il existe $t_1 \in \mathbb{R}$ et $t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $X_1(t_1) = X_0$ et $X_2(t_2) = X_0$. Mais on connaît la forme des solutions des systèmes différentiels (voir le théorème 3) : il existe un vecteur V_1 tel que $X_1(t) = \exp(tA)V_1$. De même, $X_2(t) = \exp(tA)V_2$. Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$ quelconque,

$$X_1(t + t_1) = \exp(tA) \cdot \exp(t_1 A) \cdot V_1 = \exp(tA)X_1(t_1) = \exp(tA)X_0$$

et de même

$$X_2(t + t_2) = \exp(tA) \cdot \exp(t_2 A) \cdot V_2 = \exp(tA)X_2(t_2) = \exp(tA)X_0.$$

Bilan : $X_1(t + t_1) = X_2(t + t_2)$. Cette conclusion peut se réécrire $X_1(t) = X_2(t + t_2 - t_1)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Autrement dit, tout point de la trajectoire T_1 est aussi un point de la trajectoire T_2 (et réciproquement). Les trajectoires sont bien confondues. □

Nous n'allons pas étudier systématiquement toutes les trajectoires possibles, mais nous allons étudier quelques cas emblématiques.

5.2. Matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Exemple 14.
Considérons le système :

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= -2y \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

C'est un système $X' = AX$ où la matrice

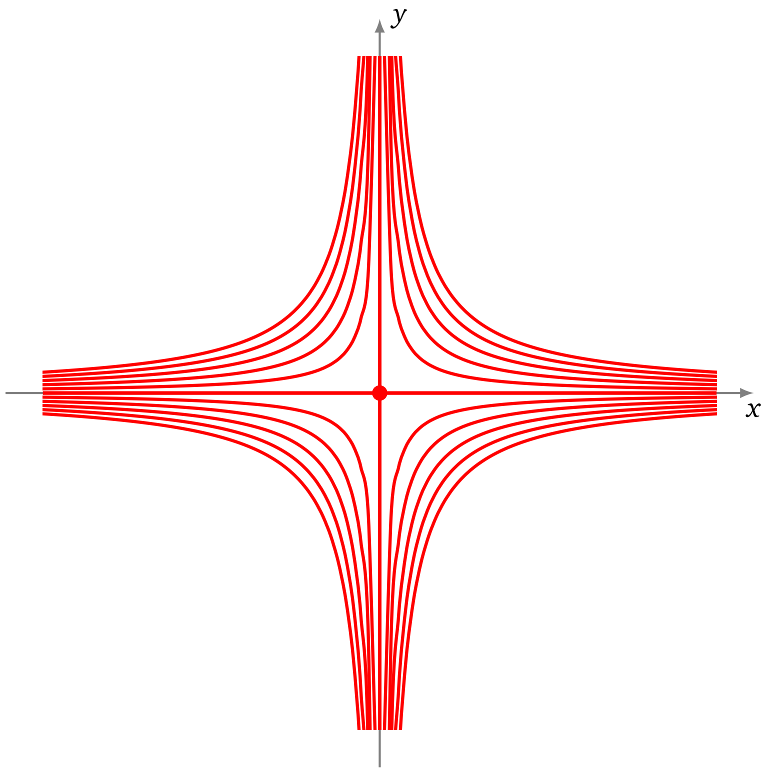
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

est diagonale. On résout les deux équations et on obtient

$$\begin{cases} x(t) &= ae^{t} \\ y(t) &= be^{-2t} \end{cases}$$

où a et b sont des constantes réelles. Étudions plus précisément les trajectoires obtenues selon les valeurs des constantes a et b.

- Si $a = b = 0$, la solution du système obtenue est l'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, et sa trajectoire est réduite au point $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = 0$ et $y(t)$ est du signe de b. Ainsi les trajectoires sont les demi-axes verticaux. Si $a \neq 0$ et $b = 0$, les trajectoires sont les demi-axes horizontaux.
- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $y(t) = b\left(\frac{a}{x(t)}\right)^2$, et les trajectoires sont donc les courbes d'équation $yx^2 = a^2 b$. Ce sont des courbes qui ressemblent à des branches d'hyperboles.



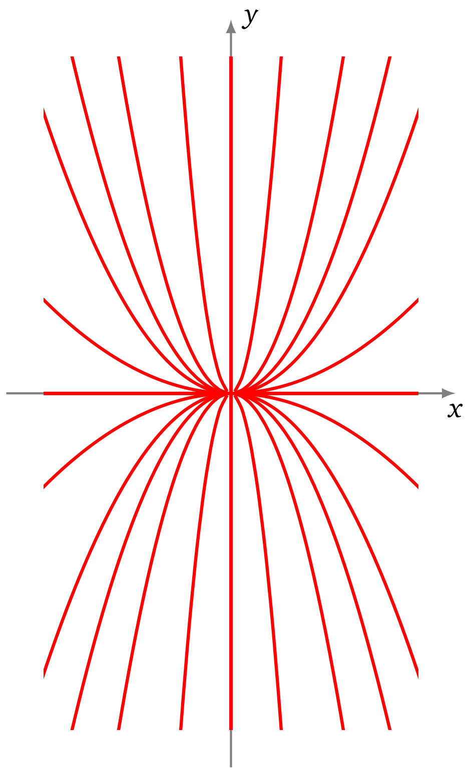
Exemple 15.
Considérons le système $X' = AX$ avec cette fois la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & +2 \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont de la forme

$$\begin{cases} x(t) &= ae^{t} \\ y(t) &= be^{+2t} \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. Dans le cas où $a \neq 0$ et $b \neq 0$, les trajectoires vérifient cette fois $y = \frac{b}{a^2}x^2$ et sont des branches de paraboles.



5.3. Matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$

Voici un exemple où l'on utilise les valeurs propres et les vecteurs propres complexes pour trouver les solutions réelles.

Exemple 16.
Soit le système $X' = AX$ avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$; par contre elle l'est sur $\mathbb{C}$.
Voici ses deux valeurs propres λ_1, λ_2 avec les deux vecteurs propres V_1, V_2 associés :

$$\lambda_1 = 1 - 2\,\mathrm{i}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_2 = 1 + 2\,\mathrm{i}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Nous savons alors par la proposition 1 que

$$X_1^{\mathbb{C}}(t) = e^{\lambda_1 t} V_1 \qquad \text{et} \qquad X_2^{\mathbb{C}}(t) = e^{\lambda_2 t} V_2$$

sont des solutions du système $X' = AX$. On calcule ensuite

$$X_1^{\mathbb{C}}(t) = e^{\lambda_1 t} V_1 = e^{(1-2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t e^{-2\mathrm{i}t} \\ -\mathrm{i}\, e^t e^{-2\mathrm{i}t} \end{pmatrix},$$

soit encore

$$X_1^{\mathbb{C}}(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos(-2t) + \mathrm{i}\sin(-2t)) \\ -\mathrm{i}\, e^t(\cos(-2t) + \mathrm{i}\sin(-2t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(\cos(2t) - \mathrm{i}\sin(2t)) \\ e^t(-\sin(2t) - \mathrm{i}\cos(2t)) \end{pmatrix}.$$

De même, on trouve

$$X_2^{\mathbb{C}}(t) = e^{\lambda_2 t} V_2 = \begin{pmatrix} e^t(\cos(2t) + \mathrm{i}\sin(2t)) \\ e^t(-\sin(2t) + \mathrm{i}\cos(2t)) \end{pmatrix}.$$

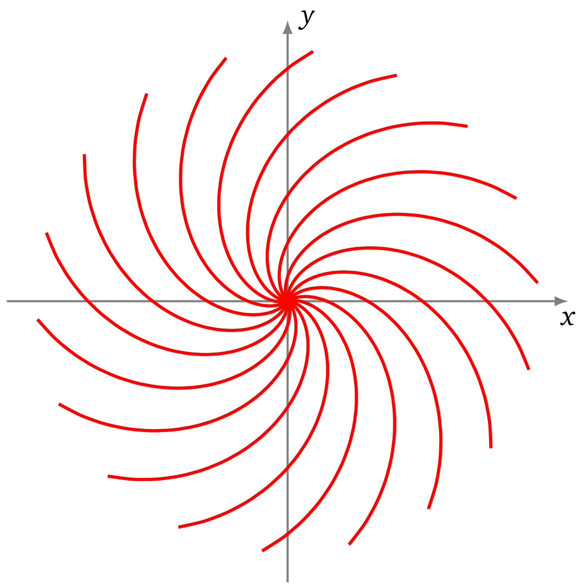
Par contre, $X_1^{\mathbb{C}}$ et $X_2^{\mathbb{C}}$ sont des solutions à valeurs complexes. Comme A est une matrice réelle, alors ces solutions sont conjuguées, et la partie réelle et la partie imaginaire de $X_1^{\mathbb{C}}$ (ou $X_2^{\mathbb{C}}$) sont solutions :

$$X_1(t) = \operatorname{Re} X_1^{\mathbb{C}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t)e^t \\ -\sin(2t)e^t \end{pmatrix} \qquad X_2(t) = \operatorname{Im} X_1^{\mathbb{C}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(2t)e^t \\ -\cos(2t)e^t \end{pmatrix}$$

Ces deux solutions X_1 et X_2 forment une base de l'espace vectoriel des solutions. Ainsi, si $X(t)$ est une solution, elle s'écrit $X(t) = aX_1(t) + bX_2(t)$.
Conclusion : les solutions sont de la forme

$$\begin{cases} x(t) &= \big(a\cos(2t) - b\sin(2t)\big)e^t \\ y(t) &= -\big(a\sin(2t) + b\cos(2t)\big)e^t \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.



5.4. Matrice non diagonalisable

Voici un exemple où l'on utilise l'exponentielle de matrices.

Exemple 17.
Considérons le système $X' = AX$ avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

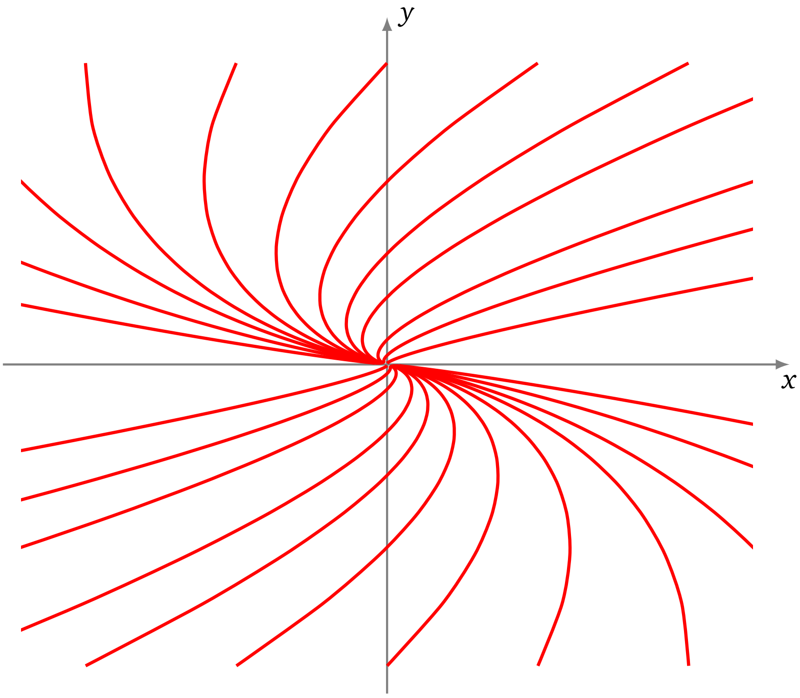
Nous savons que les solutions sont de la forme $X(t) = \exp(tA)X_0$. Il est ici facile de calculer $\exp(tA)$:

- **Première méthode**. Par récurrence, il vient facilement

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad \exp(tA) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

- **Seconde méthode.** La décomposition de Dunford est ici $A = D + N$ avec
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On a bien $DN = ND$ (car la matrice identité commute avec n'importe quelle matrice). Il est clair que N^2 est la matrice nulle. Ainsi
$$\exp(tA) = \exp(tD) \cdot \exp(tN) = \exp(tD) \cdot (I + tN) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Avec $X_0 = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$, les solutions et les trajectoires sont données par :
$$\begin{cases} x(t) & = & (a+bt)e^t \\ y(t) & = & be^t \end{cases}$$



Mini-exercices.

1. Trouver les solutions du système différentiel $\begin{cases} x' & = & y \\ y' & = & -x \end{cases}$. Montrer que les trajectoires des solutions sont des cercles centrés à l'origine.
2. Trouver les solutions du système différentiel $X' = AX$ où $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Trouver la trajectoire passant par le point $(1, 0)$.
3. Diagonaliser la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, c'est-à-dire déterminer une matrice diagonale D semblable à A. Trouver les solutions du système différentiel $X' = DX$, et tracer les trajectoires. En déduire les solutions et les trajectoires du système $X' = AX$.

Auteurs du chapitre

D'après un cours de Sandra Delaunay et un cours d'Alexis Tchoudjem.
Revu et augmenté par Arnaud Bodin.
Relu par Stéphanie Bodin et Vianney Combet.