Matrice jacobienne

Pour une fonction de plusieurs variables, il n'y a pas une dérivée mais plusieurs : une pour chaque variable. Si en plus la fonction est à valeurs vectorielles alors, pour chaque composante et pour chaque variable, il y a une dérivée. Toute ces dérivées sont regroupées dans la matrice jacobienne.

1. Matrice jacobienne

1.1. Fonctions vectorielles

Une fonction est dite *fonction vectorielle* lorsque l'espace d'arrivée n'est pas $\mathbb{R}$ mais $\mathbb{R}^p$, avec $p \geqslant 2$:

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big) \end{array}$$

Chaque composante f_j, pour $j = 1, \dots, p$, est une fonction de plusieurs variables à valeurs réelles : $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
On note $x \mapsto F(x)$ ou bien encore $(x_1, \dots, x_n) \mapsto F(x_1, \dots, x_n)$.
On a déjà rencontré des fonctions à valeurs vectorielles. Quelques exemples :

- De $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$: $F(t) = (t^2, t)$.
- De $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.
- De $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $F(x, y) = (x^2, y^3, x^2 + y^2)$.
- De $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$: $F(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ où $x = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Un exemple important est le cas d'une application linéaire.

- Par exemple, $L(x, y, z) = (2x + 3y - z, 5y - 7z)$ est une application linéaire $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Elle s'exprime aussi : $L(x, y, z) = A \times \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}$.
- Plus généralement, pour une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, il existe une matrice A avec p lignes et n colonnes telle que

$$L(x_1, \dots, x_n) = A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

1.2. Matrice jacobienne

Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction, dont les composantes sont $F = (f_1, \dots, f_p)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose que les dérivées partielles $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ existent en x (pour tous $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$).

Définition 1.

> La ***matrice jacobienne*** de F en $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est
> $$J_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice à p lignes et n colonnes. La première ligne correspond aux dérivées partielles de f_1, la seconde ligne aux dérivées partielles de f_2, etc.

Voici ce que cela donne pour $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $F = (f_1, f_2)$, en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Exemple 1.
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (x^2 + y^2, e^{x-y})$. Au point (x, y), on a :
$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}.$$
Par exemple, au point $(x_0, y_0) = (2, 1)$, la matrice jacobienne est
$$J_F(2,1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ e & -e \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.
Les coordonnées polaires d'un point du plan définissent l'application $F : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $F(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors
$$J_F(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Voyons une autre situation, où $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ avec $F = (f_1, f_2)$, en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:
$$J_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Exemple 3.
Pour $F(x, y, z) = (e^{xy}, z\sin x)$, on a
$$J_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} & 0 \\ z\cos x & 0 & \sin x \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ une fonction d'une seule variable, mais à valeurs vectorielles, définie par $F(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$. Alors
$$J_F(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_p'(x) \end{pmatrix}.$$

1.3. Opérateurs différentiels classiques

Gradient

Pour une fonction à valeurs scalaires $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dont les dérivées partielles existent, le vecteur ***gradient*** est :

$$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

C'est un vecteur colonne qui est la transposée de la matrice jacobienne (qui elle est ici un vecteur ligne) :

$$\operatorname{grad} f(x) = J_f(x)^T.$$

On reviendra en détail sur le gradient dans le chapitre « Gradient – Théorème des accroissements finis ».

Les physiciens notent le gradient $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$ où ∇ (qui se lit « nabla ») correspond à l'opérateur

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Divergence

Pour une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n = p)$ de composantes $f_1, \ldots, f_n$ dont toutes les dérivées partielles existent, on définit sa ***divergence*** par

$$\operatorname{div} F(x) = \operatorname{tr} J_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)$$

où $\operatorname{tr} J_F(x)$ est la trace de la matrice jacobienne.

Attention ! Ne pas confondre les notions de gradient et de divergence : $\operatorname{grad} F(x)$ est un vecteur alors que $\operatorname{div} F(x)$ est un nombre réel !

Les physiciens notent la divergence $\operatorname{div} F(x) = \nabla \cdot F(x)$, où $u \cdot v$ est le produit scalaire canonique des vecteurs u et v sur $\mathbb{R}^n$, ce qui fait que

$$\operatorname{div} F(x) = \nabla \cdot F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.

Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $F(x, y, z) = \left(x^2 y, \sin(yz), e^{xyz}\right)$. Alors

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = 2xy + z\cos(yz) + xye^{xyz}.$$

Rotationnel en dimension 2

Pour une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de composantes f_1, f_2 dont toutes les dérivées partielles existent, on définit le ***rotationnel*** de F par

$$\operatorname{rot} F(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y).$$

Le rotationnel est ici un nombre réel.

Exemple 6.
Soit $F(x,y) = \left(\frac{y}{x^3}, y\ln x\right)$ définie sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Alors

$$\operatorname{rot} F(x,y) = \frac{\partial(y\ln x)}{\partial x} - \frac{\partial(\frac{y}{x^3})}{\partial y} = \frac{y}{x} - \frac{1}{x^3}.$$

Rotationnel en dimension 3

Pour une fonction $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ de composantes f_1,f_2,f_3 dont toutes les dérivées partielles existent, on définit le ***rotationnel*** de F par

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Le rotationnel est donc ici un vecteur. Pour se souvenir de la formule, les physiciens écrivent $\operatorname{rot} F(x,y,z) = \nabla\wedge F(x,y,z)$, où $u\wedge v$ désigne le produit vectoriel entre les vecteurs u et v :

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \nabla\wedge F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Exemple 7.
Soit $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par $F(x,y,z) = (x^3, yz^2, xyz)$. Alors

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz - 2yz \\ -yz \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.4. Différentielle

Le pendant théorique de la matrice jacobienne est la différentielle associée à $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ en un point x. Cette section est plus théorique : pour une première lecture, on peut juste retenir que la différentielle $\mathrm{d}F(x)$ est une application linéaire dont la matrice (dans la base canonique) est la matrice jacobienne $J_F(x)$. Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{d}F(x)(h) = J_F(x)\times h}$$

où $x\in\mathbb{R}^n$ et $h\in\mathbb{R}^n$, alors que le résultat $\mathrm{d}F(x)(h)$ est un élément de $\mathbb{R}^p$.

Voici les explications de ces notions en détail. Les notions de limite et de continuité pour $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ sont similaires à celles des fonctions $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$: on remplace dans l'espace d'arrivée la valeur absolue de $\mathbb{R}$ par une norme sur $\mathbb{R}^p$.

Nous allons voir ce qu'il en est pour la différentielle d'une fonction à valeurs vectorielles. Soit $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ dont les composantes sont $F=(f_1,\ldots,f_p)$ avec chaque $f_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

Définition 2.

- $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ est ***différentiable*** en $x\in\mathbb{R}^n$ si chacune des composantes $f_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(j=1,\ldots,p)$ est différentiable en x. On note $\mathrm{d}f_j(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ la différentielle de f_j en x.
- La ***différentielle*** d'une application vectorielle différentiable $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ en $x\in\mathbb{R}^n$ est l'application linéaire $\mathrm{d}F(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ définie par

$$\mathrm{d}F(x) = \big(\mathrm{d}f_1(x),\ldots,\mathrm{d}f_p(x)\big).$$

Attention ! La différentielle $\mathrm{d}F(x)$ de F en $x \in \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, donc c'est bien une fonction (et pas un vecteur). L'évaluation de cette fonction donne une expression avec des vecteurs :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \qquad \mathrm{d}F(x)(h) = \big(\mathrm{d}f_1(x)(h), \ldots, \mathrm{d}f_p(x)(h)\big).$$

Proposition 1.
Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\boxed{\mathrm{d}F(x)(h) = J_F(x) \times h}$$

où $J_F(x)$ est la matrice jacobienne de F en x, quel que soit $h \in \mathbb{R}^n$.

Autrement dit, trouver la différentielle en x revient à calculer la matrice jacobienne en x. Cette proposition découle de l'expression de chaque différentielle $\mathrm{d}f_j(x)$ à l'aide des dérivées partielles $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Exemple 8.
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y) = (ye^{x^2}, x^2 - y)$.
Calculons $\mathrm{d}F(x,y)(h,k)$ quels que soient (x,y), $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.

- La matrice jacobienne de F est :

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xye^{x^2} & e^{x^2} \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

- En (x,y) et pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a donc :

$$\mathrm{d}F(x,y)(h,k) = J_F(x,y) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2xyh + k)e^{x^2} \\ 2xh - k \end{pmatrix}$$

- Par exemple, au point $(x_0, y_0) = (1,1)$, on a $\mathrm{d}F(1,1)(h,k) = \big((2h+k)e, 2h-k\big)$.

Remarque.

- Si F a des composantes de classe $\mathscr{C}^1$ (c'est-à-dire toutes les dérivées partielles existent et sont continues), alors elles sont différentiables et F est également différentiable.
- Si F est différentiable en x, alors F est continue en x.
- Si $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire alors, en tout point, sa différentielle est l'application elle-même : autrement dit, $\mathrm{d}L(x) = L$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque.
Il existe une autre définition équivalente des deux notions rencontrées.

- $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est ***différentiable*** en $x \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que :

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{F(x+h) - F(x) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

- Dans ce cas, L est la ***différentielle*** de F en x et on la note $\mathrm{d}F(x)$.

Mini-exercices.

1. Soient $F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Justifier que les égalités suivantes sont vraies : $J_{F+G}(x) = J_F(x) + J_G(x)$; $J_{\lambda F}(x) = \lambda J_F(x)$. Trouver un exemple où $J_F(x+y)$ n'est pas égal à $J_F(x) + J_F(y)$.
2. Calculer en tout point la matrice jacobienne de l'application F définie par $F(x,y) = (x^2+y^2, e^{xy}, x+y)$. Même question avec $F(x,y,z) = (x^{y+z}, z\arctan(y))$.
3. Calculer la divergence et le rotationnel de F définie par $F(x,y) = (y\,\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x/y))$. On rappelle que $\mathrm{ch}\,x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}\,x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Même question avec $F(x,y,z) = (x+yz, \sin(y)\sin(z), \sqrt{x+z})$.
4. À quelle condition sur la matrice jacobienne $J_F(x)$ la différentielle $\mathrm{d}F(x)$ est-elle bijective ?
5. Exprimer la différentielle de $F(x,y) = \big(\frac{1}{x}\ln(y-1), \frac{e^y-x}{x^2}\big)$ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times]1, +\infty[$.

2. Matrice jacobienne d'une composée

Les dérivées partielles d'une composée de fonctions sont compliquées à obtenir. C'est l'objet de cette section.

2.1. Formule

Rappelons tout d'abord la formule de dérivée d'une composée pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. Alors $g \circ f$ est dérivable et

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto] & f(x) & \\
& y \arrow[r, mapsto] & g(y)
\end{tikzcd}$$

Remarque.
Il peut être intéressant de nommer x la variable de la fonction f et y la variable de la fonction g. La formule peut alors aussi s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}(g \circ f)}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(f(x)) \times \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x).$$

En notant $y = f(x)$, alors on peut considérer g comme une fonction de la variable y, mais aussi (par composée) de la variable x. On peut alors écrire comme les physiciens :

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} \times \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

C'est une formule que l'on mémorise facilement en disant que l'on simplifie la fraction en éliminant les $\mathrm{d}y$ au numérateur et au dénominateur.

Passons maintenant au cas de $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $G : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. La composée est alors $G \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$, et est bien sûr définie par $(G \circ F)(x) = G\big(F(x)\big)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "G \circ F"] & \mathbb{R}^p \arrow[r, "G"] & \mathbb{R}^q \\
x \arrow[r, mapsto] & F(x) & \\
& y \arrow[r, mapsto] & G(y)
\end{tikzcd}$$

Théorème 1.
Si F et G sont différentiables alors $G \circ F$ est différentiable et les matrices jacobiennes sont reliées par la formule suivante :

$$\boxed{J_{G \circ F}(x) = J_G\big(F(x)\big) \times J_F(x)}$$

Ici, « $\times$ » est le produit des deux matrices jacobiennes.

On rappelle en particulier que si les composantes de F et G sont de classe $\mathscr{C}^1$ (i.e. les dérivées partielles existent et sont continues) alors les fonctions sont différentiables et la formule est valable. Et en plus $G \circ F$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

Attention ! Noter que $J_F(x)$ et $J_{G\circ F}(x)$ sont des matrices jacobiennes calculées en x mais que, dans la formule, ***$J_G\big(F(x)\big)$ est la matrice jacobienne de G en $F(x)$*** (et pas en x, ce qui pourrait même ne pas avoir de sens). C'est une source fréquente d'erreurs !

Exemple 9.
Soient $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x + y, e^{2x-y})$ et $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $G(x, y) = (xy, y \sin x, x^2)$. Les matrices jacobiennes de F et de G sont :

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2e^{2x-y} & -e^{2x-y} \end{pmatrix} \qquad J_G(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y\cos x & \sin x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

Attention, nous avons besoin de $J_G(F(x, y))$. Donc, dans $J_G(x, y)$, on remplace x par la première composante de F (c'est $x + y$) et y par la seconde composante de F (c'est e^{2x-y}). Ainsi,

$$J_G(F(x,y)) = \begin{pmatrix} e^{2x-y} & x+y \\ e^{2x-y}\cos(x+y) & \sin(x+y) \\ 2(x+y) & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la matrice jacobienne de la composée $G \circ F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, on applique la formule donnée par le produit de matrices :

$$J_{G\circ F}(x,y) = J_G\big(F(x,y)\big) \times J_F(x,y)$$

On trouve

$$J_{G\circ F}(x,y) = \begin{pmatrix} (1+2x+2y)e^{2x-y} & (1-x-y)e^{2x-y} \\ \big(\cos(x+y)+2\sin(x+y)\big)e^{2x-y} & \big(\cos(x+y)-\sin(x+y)\big)e^{2x-y} \\ 2x+2y & 2x+2y \end{pmatrix}.$$

Voici la version du théorème en termes de différentielles.

Théorème 2.
Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en x, et si $G : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est différentiable en $F(x)$, alors $G \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ est différentiable en x et on a :

$$\mathrm{d}(G\circ F)(x) = \mathrm{d}G(F(x)) \circ \mathrm{d}F(x).$$

Autrement dit, l'application linéaire $\mathrm{d}(G \circ F)(x)$ est la composée de l'application linéaire $\mathrm{d}G(F(x))$ avec l'application linéaire $\mathrm{d}F(x)$.

2.2. Applications

Nous allons appliquer la formule de la matrice jacobienne d'une composée pour calculer des dérivées partielles. Le plus compliqué est d'identifier quelles sont les fonctions à composer et de s'adapter aux noms des variables qui peuvent changer selon les situations.
Les deux seules choses à retenir, c'est d'abord la formule $J_{G\circ F}(x) = J_G\big(F(x)\big) \times J_F(x)$, et ensuite comment l'appliquer. Il est donc inutile d'apprendre les formules qui suivent.

Cas $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Proposition 3.
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto F(t) = (x(t), y(t))$ une fonction, avec $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ dérivables, et soit $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto G(x, y)$ une fonction différentiable. Alors $h = G\circ F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto h(t) = G(x(t), y(t))$

est dérivable et

$$h'(t) = \frac{\partial G}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) \cdot x'(t) + \frac{\partial G}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) \cdot y'(t).$$

C'est une application directe de la formule $J_h(t) = J_G(F(t)) \times J_F(t)$, avec :

$$J_h(t) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t) = h'(t) \qquad J_G(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \qquad J_F(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Exemple 10.
Soit $G(x, y) = \cos(y)e^x$. Calculer la dérivée de la fonction $h : t \mapsto G(t^2, \sin t)$.

Solution.
Une première méthode serait d'écrire $h(t) = \cos(\sin t)e^{t^2}$ puis de dériver h...
Mais utilisons ici la formule $J_h(t) = J_G(F(t)) \times J_F(t)$, où l'on définit $F(t) = (t^2, \sin t)$, de sorte que $h = G \circ F$.
Sachant que :

$$J_h(t) = h'(t) \qquad J_G(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(y)e^x & -\sin(y)e^x \end{pmatrix} \qquad J_F(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

on calcule $J_G(F(t))$ et on obtient

$$h'(t) = 2t\big(\cos(\sin t)e^{t^2}\big) + \cos(t)\big(-\sin(\sin t)e^{t^2}\big) = \big(2t\cos(\sin t) - \cos(t)\sin(\sin t)\big)e^{t^2}.$$

Exemple 11.
Soit $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $h(t) = G(2t, 1 + t^2)$. Exprimer la dérivée de h en fonction des dérivées partielles de G.

Solution.
On pose $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(t) = (2t, 1 + t^2)$, de sorte que $h = G \circ F$. Nous avons donc

$$J_h(t) = h'(t) \qquad J_G(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \qquad J_F(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$h'(t) = J_h(t) = J_G(F(t)) \times J_F(t) = 2\frac{\partial G}{\partial x}(2t, 1 + t^2) + 2t\frac{\partial G}{\partial y}(2t, 1 + t^2).$$

Cas $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Proposition 4.
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction dont chacune des composantes est dérivable, et soit $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. Alors $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = G\big(F(t)\big)$ est dérivable et :

$$h'(t) = \big\langle \operatorname{grad} G\big(F(t)\big) \mid F'(t) \big\rangle.$$

Cas $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Proposition 5.
Soient $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big)$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto G(u, v)$ des fonctions différentiables. La fonction $H = G \circ F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto G\big(F(x, y)\big)$ est différentiable et :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) & = & \frac{\partial G}{\partial u}\big(F(x, y)\big)\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial G}{\partial v}\big(F(x, y)\big)\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) & = & \frac{\partial G}{\partial u}\big(F(x, y)\big)\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial G}{\partial v}\big(F(x, y)\big)\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{array} \right. .$$

C'est encore une fois la formule $J_H(x,y) = J_G(F(x,y)) \times J_F(x,y)$, avec :

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \qquad J_G(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial G}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

et

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Exemple 12.
Calculer les dérivées partielles de la fonction $(x,y) \mapsto G(x-y, x+y)$ où $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable.

Solution.
On pose $F(x,y) = (x-y, x+y)$, on note (u,v) les variables de la fonction G et $H(x,y) = (G \circ F)(x,y) = G(x-y, x+y)$.
On a donc :

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \qquad J_G(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial G}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \qquad J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) & = & \frac{\partial G}{\partial u}(x-y, x+y) + \frac{\partial G}{\partial v}(x-y, x+y) \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) & = & -\frac{\partial G}{\partial u}(x-y, x+y) + \frac{\partial G}{\partial v}(x-y, x+y) \end{cases}$$

Un autre exemple.

Exemple 13.
Prenons $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies par

$$F(x,y) = (x + y^4, y - 3x^2, 2x^2 - 3y) \quad \text{et} \quad G(x,y,z) = 2xy - 3(x+z).$$

Calculer les dérivées partielles de la fonction $H = G \circ F$.

Solution.

- Tout d'abord, on note que H est une fonction de deux variables à valeurs réelles, c'est-à-dire $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour calculer $\frac{\partial H}{\partial x}$ et $\frac{\partial H}{\partial y}$, il suffit de calculer la matrice jacobienne de H.
- La formule de la matrice jacobienne d'une composée s'écrit :
$$J_H(x,y) = J_G(F(x,y)) \times J_F(x,y).$$
- On a
$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \qquad J_G(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y-3 & 2x & -3 \end{pmatrix} \qquad J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 4y^3 \\ -6x & 1 \\ 4x & -3 \end{pmatrix}.$$
- On en déduit que
$$J_G(F(x,y)) = \begin{pmatrix} 2(y-3x^2)-3 & 2(x+y^4) & -3 \end{pmatrix}.$$
- On obtient $\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)$ comme la première composante de $J_H(x,y)$:
$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = 1 \cdot \big(2(y-3x^2)-3\big) - 6x \cdot \big(2(x+y^4)\big) + 4x \cdot \big(-3\big) = -12xy^4 - 18x^2 + 2y - 12x - 3$$
- À vous de faire le calcul de $\frac{\partial H}{\partial y}$!

Mini-exercices.

1. Calculer de deux façons différentes la dérivée de la fonction $t \mapsto G(\sin t, e^t)$, où $G(x,y) = \frac{x}{y}$. Même question avec $t \mapsto G(t+1, t^2, \frac{1}{t})$ et $G(x,y,z) = x^2 + \sqrt{yz}$.
2. Exprimer les dérivées partielles de $(x,y) \mapsto G(x^2 - y^3, \ln(x) - y)$ en fonction des dérivées partielles

de $G:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Même question avec $(x,y,z) \mapsto G(x+y^2, 2y-z, xz)$ et $G:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

3. Soit $G:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $G(x,y) = \left(\frac{x}{y}, \ln(x+y)\right)$. Calculer la matrice jacobienne de la fonction définie par $(x,y) \mapsto G(ax+by, cx+dy)$, où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

Auteurs du chapitre

Arnaud Bodin. D'après des cours de Abdellah Hanani (Lille), Goulwen Fichou et Stéphane Leborgne (Rennes), Laurent Pujo-Menjouet (Lyon). Relu par Anne Bauval, Vianney Combet et Barbara Tumpach.