

# Diagonalisation

La diagonalisation est une opération fondamentale des matrices. Nous allons énoncer des conditions qui déterminent exactement quand une matrice est diagonalisable. Nous reprenons pas à pas les notions du chapitre « Valeurs propres, vecteurs propres », mais du point de vue plus théorique des applications linéaires.

## Notations.

Dans ce chapitre,  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.  $\mathbb{K}$  est un corps. Dans les exemples de ce chapitre,  $\mathbb{K}$  sera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Sauf mention contraire,  $E$  sera de dimension finie.

## 1. Valeurs propres, vecteurs propres

Commençons par définir les valeurs et les vecteurs propres d'une application linéaire. Il est important d'avoir d'abord compris le chapitre « Valeurs propres, vecteurs propres » des matrices.

### 1.1. Définitions

**Rappel.**  $f : E \rightarrow E$  est appelé un *endomorphisme* si  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans lui-même. Autrement dit, pour tout  $v \in E$ ,  $f(v) \in E$  et, en plus, pour tous  $u, v \in E$  et tout  $\alpha \in \mathbb{K}$  :

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \quad \text{et} \quad f(\alpha v) = \alpha f(v)$$

#### Définition 1.

Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme.

- $\lambda \in \mathbb{K}$  est dite *valeur propre* de l'endomorphisme  $f$  s'il existe un vecteur non nul  $v \in E$  tel que

$$f(v) = \lambda v.$$

- Le vecteur  $v$  est alors appelé *vecteur propre* de  $f$ , associé à la valeur propre  $\lambda$ .
- Le *spectre* de  $f$  est l'ensemble des valeurs propres de  $f$ . Notation :  $\text{sp}(f)$  (ou  $\text{sp}_{\mathbb{K}}(f)$  si on veut préciser le corps de base).

Si  $v$  est un vecteur propre alors, pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}^*$ ,  $\alpha v$  est aussi un vecteur propre.

Ces définitions sont bien sûr compatibles avec celles pour les matrices. Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Soit  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  l'application linéaire définie par  $f(v) = Av$  (où  $v$  est considéré comme un vecteur colonne). Alors les valeurs propres (et les vecteurs propres) de  $f$  sont celles de  $A$ .

## 1.2. Exemples

La principale source d'exemples provient des matrices et nous renvoyons encore une fois au chapitre « Valeurs propres, vecteurs propres ».

### Exemple 1.

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$f(x, y, z) = (-2x - 2y + 2z, -3x - y + 3z, -x + y + z).$$

1. Écriture en terme de matrice. L'application  $f$  s'écrit aussi  $f(X) = AX$  avec :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Le vecteur  $v_1 = (1, 1, 0)$  est vecteur propre.

En effet,  $f(1, 1, 0) = (-4, -4, 0)$ , autrement dit  $f(v_1) = -4v_1$ . Ainsi  $v_1$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_1 = -4$ .

Si on préfère faire les calculs avec les matrices, on considère  $v_1$  comme un vecteur colonne et on calcule  $Av_1 = -4v_1$ .

3.  $\lambda_2 = 2$  est valeur propre.

Pour le prouver, il s'agit de trouver un vecteur non nul dans  $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id}_{\mathbb{R}^3})$  pour  $\lambda_2 = 2$ . Pour cela, on calcule  $A - \lambda_2 I_3$  :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On trouve que  $v_2 = (0, 1, 1)$  est dans le noyau de  $A - 2I_3$ , c'est-à-dire  $(A - 2I_3)v_2$  est le vecteur nul. En d'autres termes,  $v_2 \in \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ , c'est-à-dire  $f(v_2) - 2v_2 = 0$ , donc  $f(v_2) = 2v_2$ . Bilan :  $v_2$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_2 = 2$ .

4.  $\lambda_3 = 0$  est valeur propre.

On peut faire juste comme au-dessus et trouver que  $v_3 = (1, 0, 1)$  vérifie  $f(v_3) = (0, 0, 0)$ . Ainsi  $f(v_3) = 0 \cdot v_3$ . Bilan :  $v_3$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_3 = 0$ .

5. On a trouvé 3 valeurs propres, et il ne peut y en avoir plus car la matrice  $A$  est de taille  $3 \times 3$ . Conclusion :  $\text{sp}(f) = \{-4, 2, 0\}$ .

### Exemple 2.

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application linéaire définie par  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ . Géométriquement,  $f$  est une projection sur  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ . Notons  $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$ , ...,  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$  les  $n$  vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Alors

$$f(e_1) = e_1 \quad f(e_2) = e_2 \quad \dots \quad f(e_{n-1}) = e_{n-1} \quad \text{et} \quad f(e_n) = 0.$$

Ainsi  $e_1, \dots, e_{n-1}$  sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 1. Et  $e_n$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 0. Conclusion :  $\text{sp}(f) = \{0, 1\}$ .

Voici d'autres exemples plus théoriques.

### Exemple 3.

1. Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace des polynômes de degré  $\leq n$ . Soit  $d : E \rightarrow E, P(X) \mapsto P'(X)$  l'application de dérivation. Pour des raisons de degré,

$$P' = \lambda P \quad \implies \quad \lambda = 0 \quad \text{et} \quad P \text{ constant}$$

De plus, tout polynôme constant non nul est un vecteur propre de  $d$ , de valeur propre associée 0; donc  $\text{sp}(d) = \{0\}$ .

2. (Cet exemple est en dimension infinie.) Soit  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions infiniment dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $d : E \rightarrow E, \phi \mapsto \phi'$  l'application de dérivation.

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , définissons la fonction

$$e_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(\lambda x).$$

On a  $e'_\lambda = \lambda e_\lambda$ , donc chaque fonction  $e_\lambda$  est un vecteur propre de  $d$  de valeur propre associée  $\lambda$ . Ici,  $\text{sp}(d) = \mathbb{R}$ .

### 1.3. Sous-espaces propres

Cherchons une autre écriture de la relation de colinéarité définissant les vecteurs propres :

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda v &\iff f(v) - \lambda v = 0 \\ &\iff (f - \lambda \text{id}_E)(v) = 0 \\ &\iff v \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \end{aligned}$$

D'où la définition :

#### Définition 2.

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Le **sous-espace propre** associé à  $\lambda$  est le sous-espace vectoriel  $E_\lambda$  défini par :

$$E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$$

On notera aussi ce sous-espace  $E_\lambda(f)$  si on souhaite signaler sa dépendance vis-à-vis de l'endomorphisme  $f$ .

Autrement dit :

$$E_\lambda = \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$$

C'est le sous-espace vectoriel de  $E$  constitué des vecteurs propres de  $f$  associés à la valeur propre  $\lambda$ , auquel on ajoute le vecteur nul. Être valeur propre, c'est donc exactement avoir un sous-espace propre non trivial :

$$\lambda \text{ valeur propre} \iff E_\lambda \neq \{0\}$$

#### Remarque.

Plaçons-nous dans le cas où  $E$  est de dimension finie.

- Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ , alors le sous-espace propre associé  $E_\lambda$  est de dimension  $\geq 1$ .
- Le sous-espace propre  $E_\lambda$  est stable par  $f$ , c'est-à-dire  $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$ . En effet :

$$v \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \implies f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) \implies f(v) \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$$

#### Théorème 1.

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  des valeurs propres **distinctes** de  $f$ . Alors les sous-espaces propres associés  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$  sont en somme directe.

On retrouve un résultat déjà prouvé dans le cas des matrices :

**Corollaire 1.**

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  des valeurs propres distinctes de  $f$  et, pour  $1 \leq i \leq r$ , soit  $v_i$  un vecteur propre associé à  $\lambda_i$ . Alors les  $v_i$  sont linéairement indépendants.

Cela implique que le nombre de valeurs propres est  $\leq \dim E$ .

Avant de lire les exemples et la preuve de ce théorème, lire si besoin la section suivante sur les sommes directes.

**Exemple 4.**

Reprenons l'exemple 1 avec  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$f(x, y, z) = (-2x - 2y + 2z, -3x - y + 3z, -x + y + z).$$

Nous avons trouvé les valeurs propres et les vecteurs propres associés suivants :

$$\lambda_1 = -4 \quad v_1 = (1, 1, 0) \quad \lambda_2 = 2 \quad v_2 = (0, 1, 1) \quad \lambda_3 = 0 \quad v_3 = (1, 0, 1)$$

Par le corollaire 1,  $(v_1, v_2, v_3)$  forme une famille libre de  $\mathbb{R}^3$  (ce que l'on vérifie par un calcul direct). Mais trois vecteurs indépendants de  $\mathbb{R}^3$  forment automatiquement une base. Conclusion :  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base de vecteurs propres de  $\mathbb{R}^3$ .

Ce que l'on peut aussi écrire :

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2 \oplus \mathbb{R}v_3$$

ou encore

$$\mathbb{R}^3 = E_{-4} \oplus E_2 \oplus E_0.$$

**Exemple 5.**

Reprenons l'exemple 2, avec  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ .

Nous avons trouvé deux valeurs propres 0 et 1.

Pour la valeur propre 0, nous avons un seul vecteur propre  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ , ainsi  $E_0 = \mathbb{R}e_n$ .

Pour la valeur propre 1, nous avons trouvé  $n - 1$  vecteurs propres linéairement indépendants  $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$ ,  $\dots$ ,  $e_{n-1} = (0, \dots, 0, 1, 0)$ . Plus précisément,

$$E_1 = \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^n}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}.$$

Nous avons bien

$$\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_1 = (\mathbb{R}e_n) \oplus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}).$$

*Preuve du théorème 1.* Pour chaque  $1 \leq i \leq r$ , soit  $v_i \in E_{\lambda_i}$ . On suppose  $v_1 + \dots + v_r = 0$ , et nous allons montrer par récurrence qu'alors  $v_1 = 0, v_2 = 0, \dots, v_r = 0$ .

Si  $r = 1$ , c'est vérifié. Fixons  $r \geq 2$  et supposons notre assertion vraie pour les familles de  $r - 1$  vecteurs. Soit une famille qui vérifie

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{r-1} + v_r = 0. \tag{1}$$

Par composition par l'application linéaire  $f$ ,

$$f(v_1) + f(v_2) + \dots + f(v_{r-1}) + f(v_r) = 0.$$

Mais comme  $v_i \in E_{\lambda_i}$  alors  $f(v_i) = \lambda_i v_i$  et donc :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{r-1} v_{r-1} + \lambda_r v_r = 0. \tag{2}$$

À partir des équations (1) et (2), on calcule l'expression (2) -  $\lambda_r$ (1) :

$$(\lambda_1 - \lambda_r)v_1 + (\lambda_2 - \lambda_r)v_2 + \dots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r)v_{r-1} = 0$$

(le vecteur  $v_r$  n'apparaît plus dans cette expression). On applique l'hypothèse de récurrence à la famille de  $n - 1$  vecteurs  $(\lambda_1 - \lambda_r)v_1, \dots, (\lambda_{r-1} - \lambda_r)v_{r-1}$ , ce qui implique que tous ces vecteurs sont nuls :

$$(\lambda_1 - \lambda_r)v_1 = 0 \quad \dots \quad (\lambda_{r-1} - \lambda_r)v_{r-1} = 0$$

Comme les valeurs propres sont distinctes, alors  $\lambda_i - \lambda_r \neq 0$  (pour  $i = 1, \dots, r - 1$ ). Ainsi

$$v_1 = 0 \quad \dots \quad v_{r-1} = 0.$$

L'équation (1) implique en plus

$$v_r = 0.$$

Cela termine la récurrence. □

## 1.4. Rappels sur les sommes directes

Il faut bien comprendre le vocabulaire suivant. On commence par le cas de deux sous-espaces.

### Définition 3.

Soient  $E_1, E_2$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ .

- La **somme** de  $E_1$  et de  $E_2$  est

$$E_1 + E_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in E_1 \text{ et } v_2 \in E_2\}.$$

- On dit que  $E_1$  et  $E_2$  sont en **somme directe** si  $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ .
- On dit que  $E_1$  et  $E_2$  sont en **somme directe dans  $E$**  si  $E_1 + E_2 = E$  et  $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ . On note alors  $E = E_1 \oplus E_2$ .

Cela se généralise à plusieurs sous-espaces.

### Définition 4.

Soient  $E_1, E_2, \dots, E_r$  des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ .

- La **somme** de  $E_1, E_2, \dots, E_r$  est

$$E_1 + E_2 + \dots + E_r = \{v_1 + v_2 + \dots + v_r \mid v_1 \in E_1, v_2 \in E_2, \dots, v_r \in E_r\}.$$

- On dit que  $E_1, E_2, \dots, E_r$  sont en **somme directe** si

$$\forall v_1 \in E_1, \dots, \forall v_r \in E_r \quad v_1 + \dots + v_r = 0 \implies v_1 = 0, \dots, v_r = 0.$$

- On dit que  $E_1, E_2, \dots, E_r$  sont en **somme directe dans  $E$**  s'ils sont en somme directe et que  $E_1 + E_2 + \dots + E_r = E$ . On note alors  $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_r$ .

### Exemple 6.

- Si  $(v_1, \dots, v_n)$  est une famille libre de  $E$ , alors les droites  $\mathbb{K}v_1, \dots, \mathbb{K}v_n$  sont en somme directe.
- Si  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $E$ , alors les droites  $\mathbb{K}v_1, \dots, \mathbb{K}v_n$  sont en somme directe dans  $E$  :  
 $E = \mathbb{K}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}v_n$ .

La notion de somme directe généralise celle de base :

### Proposition 1.

Les sous-espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_r$  sont en somme directe si et seulement si, pour chaque  $v \in E_1 + \dots + E_r$ , il existe  $v_i \in E_i$  unique ( $1 \leq i \leq r$ ) tel que

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_r.$$

En particulier,  $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$  si et seulement si, pour tout  $v \in E$ , il existe un unique  $v_i \in E_i$  tel que

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_r.$$

Voici une autre application : si  $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$  et si  $\mathcal{B}_i$  est une base de  $E_i$  (pour  $1 \leq i \leq r$ ) alors  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$  est une base de  $E$ .

Il est facile de calculer la dimension d'une somme directe :

**Proposition 2.**

Les sous-espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_r$  sont en somme directe si et seulement si

$$\dim(E_1 + \cdots + E_r) = \dim E_1 + \cdots + \dim E_r.$$

En particulier, si  $E = E_1 + \cdots + E_r$ , alors les sous-espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_r$  sont en somme directe dans  $E$  si et seulement si

$$\dim E = \dim E_1 + \cdots + \dim E_r.$$

**Mini-exercices.**

1. Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme. Quel est le lien entre l'assertion «  $f$  injective » et les valeurs propres de  $f$  ? Si  $E$  est de dimension finie, que peut-on dire de plus ?
2. Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
  - (a) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont valeurs propres, alors  $\lambda_1 + \lambda_2$  aussi.
  - (b) Si  $v_1$  et  $v_2$  sont vecteurs propres, alors  $v_1 + v_2$  aussi.
  - (c) Si  $\lambda$  est valeur propre, alors  $\mu \cdot \lambda$  aussi (pour  $\mu \in \mathbb{K}^*$ ).
  - (d) Si  $v$  est vecteur propre, alors  $\mu \cdot v$  aussi (pour  $\mu \in \mathbb{K}^*$ ).
3. Soient  $f, g : E \rightarrow E$  deux endomorphismes. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
  - (a) Si  $\lambda$  est valeur propre pour  $f$  et pour  $g$ , alors  $\lambda$  est valeur propre pour  $f + g$ .
  - (b) Si  $v$  est vecteur propre pour  $f$  et pour  $g$ , alors  $v$  est vecteur propre pour  $f + g$ .
  - (c) Si  $\lambda$  est valeur propre pour  $f$ , alors  $\mu \cdot \lambda$  est valeur propre pour  $\mu \cdot f$  (pour  $\mu \in \mathbb{K}^*$ ).
  - (d) Si  $v$  est vecteur propre pour  $f$ , alors  $\mu \cdot v$  est vecteur propre pour  $\mu \cdot f$  (pour  $\mu \in \mathbb{K}^*$ ).
4. Montrer (sans utiliser le cours) que si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux valeurs propres distinctes d'un endomorphisme  $f : E \rightarrow E$  alors  $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$ .
5. Montrer que si  $f : E \rightarrow E$  est un endomorphisme vérifiant  $f^2 = f$  (c'est-à-dire, pour tout  $x \in E$ ,  $f(f(x)) = f(x)$ ) alors  $E_0 = \text{Ker } f$  et  $E_1 = \text{Im } f$ .

## 2. Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique permet de trouver facilement les valeurs propres. Encore une fois, le chapitre « Valeurs propres, vecteurs propres » sur les matrices fournit de nombreux exemples.

### 2.1. Polynôme caractéristique

**Définition 5.**

Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ . Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  la matrice de  $f$  dans une base  $\mathcal{B}$ .

Le **polynôme caractéristique** de  $f$  est égal au polynôme caractéristique de la matrice  $A$  :

$$\chi_f(X) = \chi_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Le polynôme caractéristique est indépendant de la matrice  $A$  (et du choix de la base  $\mathcal{B}$ ). En effet, si  $B$  est la matrice du même endomorphisme  $f$  mais dans une autre base  $\mathcal{B}'$ , alors on sait qu'il existe  $P \in M_n(\mathbb{K})$  inversible telle que  $B = P^{-1}AP$ . On écrit :

$$B - XI_n = P^{-1}(A - XI_n)P.$$

Alors,

$$\chi_B(X) = \det(B - XI_n) = \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(A - XI_n) \cdot \det(P) = \det(A - XI_n) = \chi_A(X).$$

### 2.2. Caractérisation des valeurs propres

**Proposition 3.**

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \iff \chi_f(\lambda) = 0$$

Voyons une autre formulation. Soit  $f : E \rightarrow E$ . Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  sa matrice dans une base  $\mathcal{B}$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors :

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } f &\iff \exists v \in E \setminus \{0\}, \quad f(v) = \lambda v \\ &\iff \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \neq \{0\} \\ &\iff f - \lambda \text{id}_E \text{ n'est pas injective} \\ &\iff f - \lambda \text{id}_E \text{ n'est pas bijective} \\ &\iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \\ &\iff \chi_f(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Noter que l'équivalence entre «  $f - \lambda \text{id}_E$  non injective » et «  $f - \lambda \text{id}_E$  non bijective » repose sur le fait que : (a)  $f - \lambda \text{id}_E$  est un endomorphisme (il va de  $E$  dans lui-même) et (b)  $E$  est de dimension finie. □

**Exemple 7.**

Si  $D$  est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors  $\chi_D(X) = (\lambda_1 - X) \cdots (\lambda_n - X)$  et donc les  $\lambda_i$  sont les racines de  $\chi_D(X)$  et aussi les valeurs propres de  $D$ .

**Exemple 8.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $f : E \rightarrow E$  une **symétrie**, c'est-à-dire un endomorphisme qui vérifie  $f^2 = -f$ . Montrons que le polynôme caractéristique est de la forme  $\chi_f(X) = \pm X^a(X+1)^b$  avec  $a, b \geq 0$ .

Pour cela, cherchons quelle peut être une valeur propre de  $f$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre, et soit  $v \in E \setminus \{0\}$  un vecteur propre associé. Alors :

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda v &\implies f(f(v)) = f(\lambda v) \\ &\implies -f(v) = \lambda f(v) \quad \text{car } f^2 = -f \\ &\implies -\lambda v = \lambda^2 v \quad \text{car } v \text{ vecteur propre} \\ &\implies -\lambda = \lambda^2 \quad \text{car } v \text{ non nul} \\ &\implies \lambda(\lambda + 1) = 0 \\ &\implies \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1 \end{aligned}$$

Conséquence : les seules valeurs propres possibles sont 0 ou  $-1$ . Par la proposition 3, les seules racines possibles de  $\chi_f(X)$  sont 0 et  $-1$ . Donc  $\chi_f(X) = \alpha X^a(X+1)^b$  où  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ,  $a, b \geq 0$ . Nous verrons juste après que le coefficient dominant est  $\pm 1$ . Ainsi  $\chi_f(X) = \pm X^a(X+1)^b$ .

## 2.3. Coefficients du polynôme caractéristique

**Proposition 4.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme. Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans une base  $\mathcal{B}$ . Le polynôme caractéristique de  $f$  est de degré  $n$  et vérifie :

$$\chi_f(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} (\text{tr} A) X^{n-1} + \cdots + \det A.$$

Si  $f$  admet  $n$  valeurs propres, qui sont donc toutes les racines de  $\chi_f(X)$ , alors de l'égalité

$$\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

on en déduit :

La somme des valeurs propres vaut  $\text{tr} A$ .

Le produit des valeurs propres vaut  $\det A$ .

*Preuve de la proposition 4.* Si  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est la matrice de  $f$ , on a

$$\chi_f(X) = \det(A - XI_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - X \end{vmatrix}.$$

Par la définition du déterminant :

$$\chi_f(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n} \quad \text{où } b_{ij} = a_{ij} \text{ si } i \neq j \text{ et } b_{ii} = a_{ii} - X$$

On met à part la permutation identité :

$$\chi_f(X) = (a_{11} - X) \cdots (a_{nn} - X) + \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma \neq \text{id}} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n}.$$

Or, si  $\sigma \neq \text{id}$ , il y a au plus  $n - 2$  entiers  $k$  tels que  $\sigma(k) = k$ , et donc le polynôme

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma \neq \text{id}} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n}$$

est de degré au plus  $n - 2$ .

Conclusion :

- Le polynôme  $\chi_f(X)$  est de degré  $n$ .
- Les termes de degré  $n$  et  $n - 1$  proviennent du produit

$$(a_{11} - X) \cdots (a_{nn} - X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} (\text{tr} A) X^{n-1} + \cdots$$

- Le terme constant, quant à lui, est donné par  $\chi_f(0) = \det A$ .

□

## 2.4. Exemples et applications

Voyons quelques applications du polynôme caractéristique :

- Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , alors tout endomorphisme  $f : E \rightarrow E$  admet au plus  $n$  valeurs propres. En effet, le polynôme caractéristique de  $f$  est un polynôme de degré  $n$ , donc admet au plus  $n$  racines dans  $\mathbb{K}$ .
- Si  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, alors tout endomorphisme  $f : E \rightarrow E$  admet au moins une valeur propre. En effet, le polynôme caractéristique de  $f$  est un polynôme complexe non constant donc admet (au moins) une racine  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ .

### Exemple 9.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice. Alors  $A$  possède un sous-espace invariant de dimension 1 ou 2.

*Démonstration.* Considérons la matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  comme une matrice de  $M_n(\mathbb{C})$ . Alors  $A$  possède une valeur propre  $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$  ( $a, b$  réels), et un vecteur propre associé  $Z = X + iY \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  où  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ .

Alors :

$$\begin{aligned} AZ = \lambda Z &\implies A(X + iY) = (a + ib)(X + iY) \\ &\implies AX + iAY = (aX - bY) + i(bX + aY) \\ &\implies \begin{cases} AX &= aX - bY \\ AY &= bX + aY \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier,  $AX$  et  $AY$  appartiennent à  $\text{Vect}(X, Y)$ , donc le sous-espace (réel)  $\text{Vect}(X, Y)$  est stable par  $A$ . Or  $X$  ou  $Y$  n'est pas nul, donc  $\text{Vect}(X, Y)$  est de dimension 1 ou 2.  $\square$

### Exemple 10.

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Si  $E$  est de dimension  $n$  et si le polynôme caractéristique  $\chi_f(X) \in \mathbb{K}[X]$  admet  $n$  racines distinctes dans  $\mathbb{K}$ , alors il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ .

*Démonstration.* Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  les  $n$  racines distinctes de  $\chi_f(X)$ . Ce sont aussi  $n$  valeurs propres de  $f$ . Soient  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs propres associés. Par le corollaire 1, la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est une famille libre de  $E$ . C'est donc une famille libre à  $n$  éléments dans un espace vectoriel de dimension  $n$  : cela implique que  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $E$ .  $\square$

### Mini-exercices.

1. Calculer le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.
2. Trouver une application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui n'admet aucune valeur propre réelle. Montrer que les valeurs propres complexes d'un tel endomorphisme  $f$  seront toujours conjuguées.
3. Calculer le polynôme caractéristique de  $A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha+1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 3 & -\alpha-1 & 2 \end{pmatrix}$  en fonction de  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $-1$  est valeur propre et en déduire les autres valeurs propres. Quelle est la multiplicité de chaque valeur propre ? Trouver un vecteur propre pour chaque valeur propre.
4. Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme tel que  $f^n$  soit l'application nulle (c'est-à-dire, pour tout  $x \in E$ ,  $f \circ f \circ \dots \circ f(x) = 0$ ). Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ , que peut valoir  $\lambda$  ? En déduire le polynôme caractéristique de  $f$ .

## 3. Diagonalisation

Dans le chapitre « Valeurs propres, vecteurs propres », nous avons énoncé un critère qui permet de diagonaliser certaines matrices. Ici nous allons énoncer un critère plus fort : nous trouvons des conditions qui sont exactement équivalentes à ce qu'une matrice soit diagonalisable.

### 3.1. Endomorphisme diagonalisable

#### Définition 6.

On dit qu'un endomorphisme  $f : E \rightarrow E$  est **diagonalisable** s'il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ .

Rappelons que :

#### Définition 7.

Soit  $A$  une matrice de  $M_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est **diagonalisable** sur  $\mathbb{K}$  s'il existe une matrice  $P \in M_n(\mathbb{K})$  inversible telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

Bien sûr, les deux définitions sont cohérentes :

#### Proposition 5.

Si  $A$  est la matrice de  $f$  dans une base  $\mathcal{B}$  quelconque alors :

$$f \text{ diagonalisable} \iff A \text{ diagonalisable}$$

Cette proposition est facile, mais il faut bien comprendre ce lien.

*Démonstration.*

- $\implies$ . Soit  $f$  un endomorphisme diagonalisable.
  - Si  $D$  est la matrice de  $f$  dans la base  $(v_1, \dots, v_n)$  formée de vecteurs propres, alors  $D$  est une matrice diagonale. En effet, comme  $f(v_i) = \lambda_i v_i$ , la matrice  $D$  est diagonale et le  $i$ -ème coefficient de la diagonale est  $\lambda_i$ .
  - Si  $A$  est la matrice de  $f$  dans une base  $\mathcal{B}$  quelconque, alors  $A$  est semblable à la matrice  $D$  ci-dessus. Il existe donc  $P$  inversible telle que  $D = P^{-1}AP$  soit diagonale.

- $\impliedby$ . Soit  $A$  une matrice diagonalisable.

L'endomorphisme  $f$ , considéré comme une application  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ , s'écrit  $f(X) = AX$  où les coordonnées de  $X$  s'expriment dans la base canonique  $(Y_1, \dots, Y_n)$  :

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \dots$$

Soit  $P$  une matrice telle que  $D = P^{-1}AP$  soit une matrice diagonale. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les coefficients de la diagonale. Notons  $(X_1, \dots, X_n)$  les vecteurs colonnes de  $P$ . Ils s'obtiennent aussi comme  $X_i = PY_i$ . Montrons que  $X_i$  est un vecteur propre de  $f$ , associé à la valeur propre  $\lambda_i$  :

$$f(X_i) = AX_i = (PDP^{-1})(PY_i) = PDY_i = P(\lambda_i Y_i) = \lambda_i(PY_i) = \lambda_i X_i.$$

Comme  $P$  est inversible, alors  $(X_1, \dots, X_n)$  est une base de vecteurs propres. □

**Exemple 11** (Projection).

On suppose que  $E = F \oplus G$  avec  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . N'importe quel  $v \in E$  se décompose de façon unique en  $v = x + y$  avec  $x \in F$ ,  $y \in G$ . La projection sur  $F$  suivant  $G$  est l'endomorphisme de  $E$  défini par :

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ v = x + y & \longmapsto & x \end{array}$$

- Pour  $v = x \in F$ , on a  $p(x) = x$  ; ces  $x$  sont les vecteurs propres pour la valeur propre 1 :

$$F = \text{Ker}(p - \text{id}_E) = E_1(p).$$

- Pour  $v = y \in G$ , on a  $p(y) = 0$  ; ces  $y$  sont les vecteurs propres pour la valeur propre 0 :

$$G = \text{Ker } p = E_0(p).$$

- Comme  $E = F \oplus G$ , alors l'union d'une base de vecteurs propres de  $E_1(p)$  et d'une base de vecteurs propres de  $E_0(p)$  forme une base de vecteurs propres de  $E$ .
- Conclusion :  $p$  est diagonalisable.

**Exemple 12** (Réflexion).

On suppose encore que  $E = F \oplus G$ . On définit la réflexion par rapport à  $F$  suivant  $G$  par :

$$r : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ v = x + y & \longmapsto & x - y \end{array}$$

De façon semblable à l'exemple précédent, on montre que  $r$  est diagonalisable avec

$$F = \text{Ker}(r - \text{id}_E) = E_1(r) \quad \text{et} \quad G = \text{Ker}(r + \text{id}_E) = E_{-1}(r).$$

**Proposition 6.**

Si  $f$  est un endomorphisme de  $E$  et si on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ses valeurs propres distinctes alors :

$$f \text{ est diagonalisable} \iff E = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id}_E) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_r \text{id}_E).$$

Autrement dit,  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $E$  est somme directe des sous-espaces propres de  $f$ .

Notons que, dans les deux exemples précédents (la projection et la symétrie), l'espace vectoriel  $E$  est bien la somme directe des deux seuls sous-espaces propres.

*Démonstration.*

- $\implies$ . Par le théorème 1, les sous-espaces propres de  $f$  sont en somme directe. Notons  $F = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$ . Comme  $f$  est supposé diagonalisable, alors il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ . Mais ces vecteurs propres sont aussi des éléments de  $F$ . Ainsi  $F$  contient une base de  $E$ . On en conclut que  $E = F = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$ .
- $\impliedby$ . Par hypothèse, les sous-espaces propres sont en somme directe dans  $E$ . On choisit une base pour chacun des sous-espaces propres  $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ . Les vecteurs de chacune de ces bases sont des vecteurs propres de  $f$ . L'union de ces bases est une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ , donc  $f$  est diagonalisable. □

## 3.2. Rappels sur les polynômes

Rappelons quelques définitions. Soit  $P(X) \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme.

- $\lambda \in \mathbb{K}$  est **racine** de  $P$  si  $P(\lambda) = 0$ .
- $\lambda \in \mathbb{K}$  est racine de  $P$  si et seulement si  $P(X) = (X - \lambda)Q(X)$  pour un polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$ .
- La **multiplicité** de  $\lambda \in \mathbb{K}$  dans  $P$  est le plus grand entier  $m$  tel que  $P(X) = (X - \lambda)^m Q(X)$  pour un polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$ .

**Notation.** On note  $m(\lambda)$  la multiplicité de  $\lambda$  comme racine de  $P$ .

- Une racine de multiplicité 1 est une **racine simple**.
- Une racine de multiplicité 2 est une **racine double**...
- Si  $\lambda$  n'est pas racine de  $P$ , on posera  $m(\lambda) = 0$ .

**Exemple 13.**

- $P(X) = (X - 2)^3(X^2 + X + 1) \in \mathbb{R}[X]$  admet 2 comme racine, et sa multiplicité est 3.
- Le même polynôme considéré cette fois dans  $\mathbb{C}[X]$  s'écrit

$$P(X) = (X - 2)^3 \left( X + \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( X + \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Les racines complexes  $-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$  sont chacune de multiplicité 1.

**Exemple 14.**

Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont deux à deux distincts et si

$$P(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r},$$

alors  $m_i$  est la multiplicité de  $\lambda_i$  dans  $P(X)$ , pour tout  $i$  ( $1 \leq i \leq r$ ).

**Définition 8.**

Un polynôme  $P(X) \in \mathbb{K}[X]$  est **scindé** sur  $\mathbb{K}$  s'il s'écrit

$$P(X) = a_n(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$$

pour certains  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  et un  $a_n \in \mathbb{K}^*$ .

Souvent, on regroupe les racines égales et on écrit :

$$P(X) = a_n(X - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \dots (X - \lambda_r)^{m(\lambda_r)}$$

avec les  $\lambda_i$  deux à deux distinctes et leurs multiplicités  $m(\lambda_i) \geq 1$ .

**Exemple 15.**

- Le polynôme  $P(X) = (X - 2)^3(X^2 + X + 1) \in \mathbb{R}[X]$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ , car  $X^2 + X + 1$  n'a pas de racine réelle. Par contre, il est scindé sur  $\mathbb{C}$  (voir le commentaire ci-dessous).
- Le polynôme  $P(X) = X^2 + 4X - 3$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  car ses racines sont les réels  $\lambda_1 = -2 - \sqrt{7}$ ,  $\lambda_2 = -2 + \sqrt{7}$ . Il s'écrit donc aussi  $P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ .

Quelques commentaires importants :

- Pour un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  non nul, on a :

$$P \text{ scindé sur } \mathbb{K} \iff \sum_{\lambda \text{ racine de } P} m(\lambda) = \deg P$$

- D'après le théorème de d'Alembert-Gauss :

Tous les polynômes sont scindés lorsque le corps de base est  $\mathbb{C}$ .

- Et donc, si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , on a toujours :

$$\deg P = \sum_{\lambda \text{ racine de } P} m(\lambda).$$

### 3.3. Diagonalisation

Nous allons énoncer un critère simple qui caractérise si un endomorphisme est diagonalisable ou pas. Ce critère se base sur le polynôme caractéristique et la dimension des sous-espaces propres, pour lesquels on établit un premier lien dans la proposition suivante. Les preuves seront faites dans la section 3.6.

**Proposition 7.**

Soient  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $\chi_f$  son polynôme caractéristique. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ , de multiplicité  $m(\lambda)$  comme racine de  $\chi_f$ , et soit  $E_\lambda$  le sous-espace propre associé. Alors on a

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m(\lambda).$$

Énonçons maintenant le théorème principal de ce chapitre. C'est un critère pour savoir si un endomorphisme – ou une matrice – est diagonalisable. Contrairement aux critères précédents, il s'agit ici d'une équivalence.

**Théorème 2.**

Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme. Alors :

$$f \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{K} \iff \begin{cases} \text{i) } \chi_f(X) \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \text{et} \\ \text{ii) pour toute valeur propre } \lambda \text{ de } f, \\ m(\lambda) = \dim \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E). \end{cases}$$

Voici une autre reformulation pour mieux comprendre ce théorème.

Soit  $f : E \rightarrow E$ . L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de  $f$ ,  $\chi_f(X)$ , est scindé sur  $\mathbb{K}$  et si, pour chacune des racines  $\lambda$ , la multiplicité de  $\lambda$  est égale à la dimension du sous-espace propre  $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ .

Bien évidemment, il faut savoir transcrire ce théorème en termes de matrices :

Soit  $A \in M_n(K)$ . Alors :

$$A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{K} \iff \begin{cases} \text{i) } \chi_A(X) \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \text{et} \\ \text{ii) pour toute valeur propre } \lambda \text{ de } A, \\ m(\lambda) = \dim \text{Ker}(A - \lambda I_n). \end{cases}$$

### Corollaire 2.

Si le polynôme  $\chi_f(X)$  (resp.  $\chi_A(X)$ ) est scindé et si les racines sont simples, alors  $f$  (resp.  $A$ ) est diagonalisable.

En effet, dans ce cas, la multiplicité  $m(\lambda)$  vaut 1 pour chaque valeur. Par la proposition 7, on a  $1 \leq \dim E_\lambda \leq m(\lambda)$ , donc la dimension de chaque sous-espace propre est aussi 1. Par le théorème 2, l'endomorphisme (ou la matrice) est diagonalisable.

## 3.4. Exemples

### Exemple 16.

Toute matrice réelle  $2 \times 2$  symétrique  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

La trace vaut  $\text{tr} A = a + d$ , le déterminant vaut  $\det A = ad - b^2$ . On utilise la formule de la proposition 4 pour en déduire, sans calculs, que le polynôme caractéristique est :

$$\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - (a + d)X + ad - b^2.$$

Sans les calculer, montrons que  $\chi_A(X)$  admet deux racines réelles. On calcule le discriminant de l'équation du second degré donnée par  $\chi_A(X) = 0$  :

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - b^2) = a^2 + d^2 - 2ad + 4b^2 = (a - d)^2 + 4b^2. \quad (3)$$

Cela prouve que  $\Delta \geq 0$ . Ainsi les deux racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  du polynôme caractéristique sont réelles.

Conclusion :

- Si  $\Delta > 0$  alors ces deux racines sont réelles et distinctes. Ainsi  $\chi_A(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$  est scindé à racines simples, donc la matrice  $A$  est diagonalisable.
- Si  $\Delta = 0$  alors, par l'équation (3), on a  $(a - d)^2 = 0$  et  $b^2 = 0$ . Donc  $a = d$  et  $b = 0$ . La matrice  $A$  est une matrice diagonale (donc diagonalisable!).

### Exemple 17.

La matrice de permutation circulaire

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

En effet :

- son polynôme caractéristique est  $\chi_A(X) = (-1)^n(X^n - 1)$  (voir le chapitre « Valeurs propres, vecteurs propres », section « Matrice compagnon »),
- les valeurs propres sont les racines  $n$ -ièmes de l'unité :

$$1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

- les racines sont simples,
- le polynôme caractéristique est bien sûr scindé sur  $\mathbb{C}$ ,
- par le corollaire 2, la matrice  $A$  est donc diagonalisable.

Exercice : Trouver une base de vecteurs propres.

**Exemple 18.**

Soit  $n \geq 2$ . Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

définie par des 1 au-dessus de la diagonale. Cette matrice n'est jamais diagonalisable ! En effet :

- Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\chi_A(X) = (-1)^n X^n$  (la matrice est triangulaire, de diagonale nulle). Donc  $\lambda = 0$  est la seule valeur propre et  $m(0) = n$ .
- Par contre,  $E_0 = \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \text{Ker} A$  est de dimension  $\dim \text{Ker} A < n$  car  $A$  n'est pas la matrice nulle.
- Comme  $\dim E_0 < m(0)$  alors, par le théorème 2,  $A$  n'est pas diagonalisable.

### 3.5. Diagonaliser

**Diagonaliser** une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  signifie trouver, si elles existent,  $P \in M_n(\mathbb{K})$  inversible et  $D \in M_n(\mathbb{K})$  diagonale telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée  $n \times n$ . Pour la diagonaliser :

1. On calcule d'abord son polynôme caractéristique  $\chi_A(X)$ .
2. On cherche les racines de  $\chi_A(X)$  : ce sont les valeurs propres de  $A$ . Si  $\chi_A(X)$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors  $A$  n'est pas diagonalisable.
3. Pour chaque valeur propre  $\lambda$  de  $A$ , on cherche une base de  $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ , c'est-à-dire on cherche une base de l'espace des solutions du système

$$AX = \lambda X.$$

4. Si, pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$ ,  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I_n) = m(\lambda)$ , alors  $A$  est diagonalisable. Sinon elle n'est pas diagonalisable.
5. Dans le cas diagonalisable, la réunion des bases des sous-espaces propres forme une base de vecteurs propres. Ainsi, si  $P$  est la matrice dont les vecteurs colonnes sont ces vecteurs propres, alors  $D = P^{-1}AP$  est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres  $\lambda$  de  $A$ , chacune apparaissant  $m(\lambda)$  fois.

On renvoie une dernière fois au chapitre « Valeurs propres, vecteurs propres » pour des exemples de diagonalisation.

**Exemple 19.**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Démontrons que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  et trouvons une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

1. Commençons par calculer le polynôme caractéristique de  $A$  :

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$$

2. Les racines du polynôme caractéristique sont les réels 1 avec la multiplicité  $m(1) = 2$ , et 2 avec la multiplicité  $m(2) = 1$ . On remarque de plus que le polynôme est scindé sur  $\mathbb{R}$ .

3. Déterminons les sous-espaces propres associés.

- Soit  $E_1$  le sous-espace propre associé à la valeur propre double 1 :  $E_1 = \text{Ker}(A - I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot X = X\}$ . Si on note  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  alors :

$$X \in E_1 \iff AX = X \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ x - y + 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+y \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$  est donc un plan vectoriel dont, par exemple, les vecteurs  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  forment une base.

- Soit  $E_2$  le sous-espace propre associé à la valeur propre simple 2 :  $E_2 = \text{Ker}(A - 2I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot X = 2X\}$ . Alors :

$$X \in E_2 \iff AX = 2X \iff \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x - y + 2z = 2z \end{cases}$$

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$  est donc une droite vectorielle, dont le vecteur  $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est une base.

4. Les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes :  $\dim E_1 = 2 = m(1)$ ,  $\dim E_2 = 1 = m(2)$ . La matrice  $A$  est donc diagonalisable.

5. Dans la base  $(X_1, X_2, X_3)$ , l'endomorphisme représenté par  $A$  (dans la base canonique) a pour matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, si on note  $P$  la matrice de passage dont les vecteurs colonnes sont  $X_1, X_2$  et  $X_3$ , c'est-à-dire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors  $P^{-1}AP = D$ .

### 3.6. Preuves

Il nous reste à prouver la proposition 7 et le théorème 2 de la section 3.3. Rappelons l'énoncé de la proposition 7.

**Proposition** (Proposition 7).

Soient  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $\chi_f$  son polynôme caractéristique. Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ , de multiplicité  $m(\lambda)$  comme racine de  $\chi_f$ , et  $E_\lambda$  le sous-espace propre associé. Alors on a

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m(\lambda).$$

*Démonstration.* Tout d'abord, par définition d'une valeur propre et d'un sous-espace propre, on a  $\dim E_\lambda \geq 1$ . Notons  $p = \dim E_\lambda$  et  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E_\lambda$ . On complète cette base en une base  $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ . Dans cette base, la matrice de  $f$  est de la forme

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \lambda I_p & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right).$$

En effet, pour chaque  $1 \leq i \leq p$ , on a  $f(e_i) = \lambda e_i$ . Maintenant, en calculant le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs :

$$\det(A - XI_n) = \det((\lambda - X)I_p) \cdot \det(B - XI_{n-p}) = (\lambda - X)^p \det(B - XI_{n-p}).$$

Cela prouve que  $(\lambda - X)^p$  divise  $\chi_f(X)$  et donc, par définition de la multiplicité d'une racine, on a  $m(\lambda) \geq p$ .  $\square$

Passons à la preuve du théorème 2.

**Théorème** (Théorème 2).

Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme. Alors :

$$f \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{K} \iff \begin{cases} \text{i) } \chi_f(X) \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \text{et} \\ \text{ii) pour toute valeur propre } \lambda \text{ de } f, \\ m(\lambda) = \dim \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E). \end{cases}$$

*Démonstration.*

- $\implies$ . Supposons  $f$  diagonalisable et notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ses valeurs propres et  $m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_r)$  leurs multiplicités respectives dans  $\chi_f(X)$ . Comme  $f$  est diagonalisable, alors il existe une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle la matrice de  $f$  est une matrice diagonale  $D$ . Notons  $n_i$  le nombre de fois où  $\lambda_i$  apparaît dans la diagonale de  $D$ . On a alors

$$\chi_f(X) = \chi_D(X) = \prod_{i=1}^r (\lambda_i - X)^{n_i}.$$

Cela prouve que  $\chi_f(X)$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et que  $m(\lambda_i) = n_i$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ .

Comme  $D$  est diagonale, pour tout  $1 \leq i \leq r$ , il existe  $n_i$  vecteurs  $v$  de la base  $\mathcal{B}$  de  $E$  tels que  $f(v) = \lambda_i v$ . Il existe donc  $n_i$  vecteurs linéairement indépendants dans  $E_{\lambda_i}$ , d'où  $\dim E_{\lambda_i} \geq n_i$ . Mais on sait que  $n_i = m(\lambda_i)$ , donc  $\dim E_{\lambda_i} \geq m(\lambda_i)$ . Enfin, on a démontré dans la proposition 7 que  $\dim E_{\lambda_i} \leq m(\lambda_i)$ , d'où l'égalité.

- $\impliedby$ . On suppose que  $\chi_f(X)$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et que, pour toute racine  $\lambda_i$  (avec  $1 \leq i \leq r$ ), on a  $\dim E_{\lambda_i} = m(\lambda_i)$ . En particulier, on a

$$\chi_f(X) = \prod_{i=1}^r (\lambda_i - X)^{m(\lambda_i)}.$$

Notons  $F = E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r}$ . On sait que les sous-espaces propres sont en somme directe d'après le théorème 1, donc  $F = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$ . Ainsi, par la proposition 2,  $\dim F = \sum_{i=1}^r \dim E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^r m(\lambda_i) = \deg \chi_f = \dim E$ . On en conclut que  $F \subset E$  et  $\dim F = \dim E$ , d'où  $F = E$ . Pour chaque  $1 \leq i \leq r$ , on note  $\mathcal{B}_i$  une base de  $E_{\lambda_i}$ . Soit  $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$ . Alors  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  (puisque c'est une base de  $F$ ). Les vecteurs de  $E_{\lambda_i}$  sont des vecteurs propres. Ainsi, il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ , ce qui prouve que  $f$  est diagonalisable.  $\square$

### Mini-exercices.

1. Montrer que si  $\lambda$  est racine simple du polynôme caractéristique alors  $\dim E_\lambda = 1$ . Que peut-on dire pour une racine double ?
2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ . En déduire les valeurs propres. Déterminer une base de chaque sous-espace propre. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? Généraliser au cas d'une matrice de taille  $n \times n$  dont tous les coefficients sont 1.
3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ , ses valeurs propres, leur multiplicité et la dimension des sous-espaces propres.  $A$  est-elle diagonalisable ?

4. Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On suppose qu'il existe un sous-espace  $F$  de  $E$  laissé stable par  $f$ . Notons  $\chi_{f|_F}$  le polynôme caractéristique de la restriction à  $F$ . Montrer alors que  $\chi_{f|_F}(X)$  divise  $\chi_f(X)$  dans  $\mathbb{K}[X]$ . *Indication* : s'inspirer de la preuve de la proposition 7.

### Auteurs du chapitre

D'après un cours de Sandra Delaunay et un cours d'Alexis Tchoudjem.

Revu et augmenté par Arnaud Bodin.

Relu par Stéphanie Bodin et Vianney Combet.