Calcul différentiel

Pour une fonction de plusieurs variables, il y a une dérivée pour chacune des variables, qu'on appelle dérivée partielle. L'ensemble des dérivées partielles permet de reconstituer une approximation linéaire de la fonction : c'est la différentielle.

1. Dérivées partielles

Rappelons la notion de dérivée. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une seule variable. La ***dérivée*** de f en $x_0 \in \mathbb{R}$, si elle existe, est :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple 1.
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est dérivable, de dérivée $f'(x_0) = 2x_0$. En effet, lorsque h tend vers 0, on a :

$$\frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h \quad \xrightarrow[h \to 0]{} \quad 2x_0.$$

1.1. Définition

Définition 1.
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que f admet une ***dérivée partielle*** par rapport à la variable x_i au point $x_0 = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ si la fonction d'une variable

$$x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

est dérivable au point a_i. Dit autrement, on définit la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point $x_0 = (a_1, \ldots, a_n)$ par

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}$$

si cette limite existe.

Notation. Cette limite se note

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

C'est la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point x_0. Le symbole « ∂ » se lit « d rond ». Une autre notation est $\partial_{x_i} f(x_0)$ ou bien $f'_{x_i}(x_0)$.
Il y a donc n dérivées partielles au point x_0 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \qquad \ldots \qquad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$$

Dans le cas d'une fonction de deux variables $(x, y) \mapsto f(x, y)$, on a :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}}$$

Remarque.
Pour une fonction d'une variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on distingue le nombre dérivé $f'(x_0)$ et la fonction dérivée f' définie par $x \mapsto f'(x)$. Il en est de même avec les dérivées partielles. Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ sont des nombres réels.
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont des fonctions de deux variables, par exemple :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{array}$$

1.2. Exemples

Méthode. Pour calculer une dérivée partielle par rapport à une variable, on n'utilise que rarement la définition avec les limites, car il suffit de dériver par rapport à cette variable en considérant les autres variables comme des constantes.

Exemple 2.
Calculer les dérivées partielles premières de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 e^{3y}.$$

Solution.
Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, qui est la dérivée partielle de f par rapport à x, on considère que y est une constante et on dérive $x^2 e^{3y}$ comme si c'était une fonction de x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x e^{3y}.$$

Pour l'autre dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$, on considère que x est une constante et on dérive $x^2 e^{3y}$ comme si c'était une fonction de y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 e^{3y}.$$

Exemple 3.
Pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \cos(x + y^2)e^{-z}$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\sin(x + y^2)e^{-z} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2y \sin(x + y^2)e^{-z} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\cos(x + y^2)e^{-z}$$

Exemple 4.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Alors, pour $i = 1, \ldots, n$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 2x_i.$$

Une fonction peut avoir des dérivées partielles sans être continue ! Nous allons le voir sur l'exemple suivant.

Exemple 5.
La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante admet des dérivées partielles en tout point mais n'est pas continue en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

1. **Non continuité à l'origine.**
   Le long du chemin $\gamma(t) = (t,t)$, pour $t \neq 0$, on a $f\big(\gamma(t)\big) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$ qui ne tend pas vers $f(0,0) = 0$. Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. **Dérivées partielles en dehors de l'origine.**
   On se place en un point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Dans un voisinage de ce point, f est définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. La fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ est donc continue et dérivable au voisinage de x_0. La dérivée partielle s'obtient en dérivant la fonction d'une variable $x \mapsto f(x, y_0)$. Ainsi, on a
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{y_0^3 - x_0^2 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}.$$
   De même, en dérivant la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$, on trouve
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{x_0^3 - x_0 y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}.$$
3. **Dérivées partielles à l'origine.**
   Comme la fonction f est définie en $(0,0)$ par une formule spéciale, il faut revenir à la définition de ce que sont les dérivées partielles à l'aide des limites.
   Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, on calcule en $(x_0, y_0) = (0,0)$:
   $$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{0}{h} = 0 \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$
   Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
   De même :
   $$\frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \frac{0}{k} = 0 \xrightarrow[k \to 0]{} 0$$
   Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Conclusion : quel que soit le point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent.

1.3. Dérivée directionnelle

Il est possible de généraliser la notion de dérivée partielle.

Définition 2.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul. La ***dérivée directionnelle*** de f en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ suivant le vecteur v est définie, si elle existe, par
$$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la dérivée directionnelle au point (x_0, y_0) suivant le vecteur $v = (h,k)$ est donc donnée par
$$D_v f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Exemple 6.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y)\neq(0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0)=0.$$

Étudier l'existence de la dérivée directionnelle de f suivant un vecteur non nul au point $(0,0)$.

Solution.
Pour tout vecteur $v=(h,k)$ non nul, on a :

$$\lim_{t\to0}\frac{f(0+th,0+tk)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{(th)^3+(tk)^3}{(th)^2+(tk)^2}-0}{t}=\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2}.$$

Donc f admet une dérivée directionnelle suivant tout vecteur non nul au point $(0,0)$ et, lorsque $v=(h,k)$, $D_vf(0,0)=\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2}$.

De façon générale, si le vecteur v est un vecteur de la base canonique, on retrouve une dérivée partielle. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

1. Si $v=(1,0)$, on retrouve $D_vf(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
2. Si $v=(0,1)$, on retrouve $D_vf(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

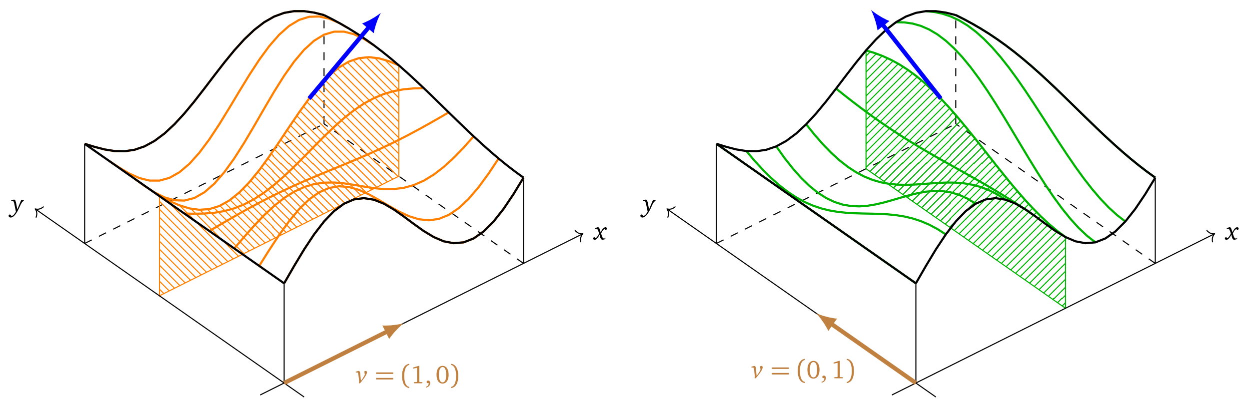
Lorsque f est différentiable (voir plus loin dans ce chapitre), nous aurons une formule simple et directe pour calculer $D_vf(x,y)$ à partir des dérivées partielles. Si f est différentiable et $v=(h,k)$ alors

$$D_vf(x,y)=h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

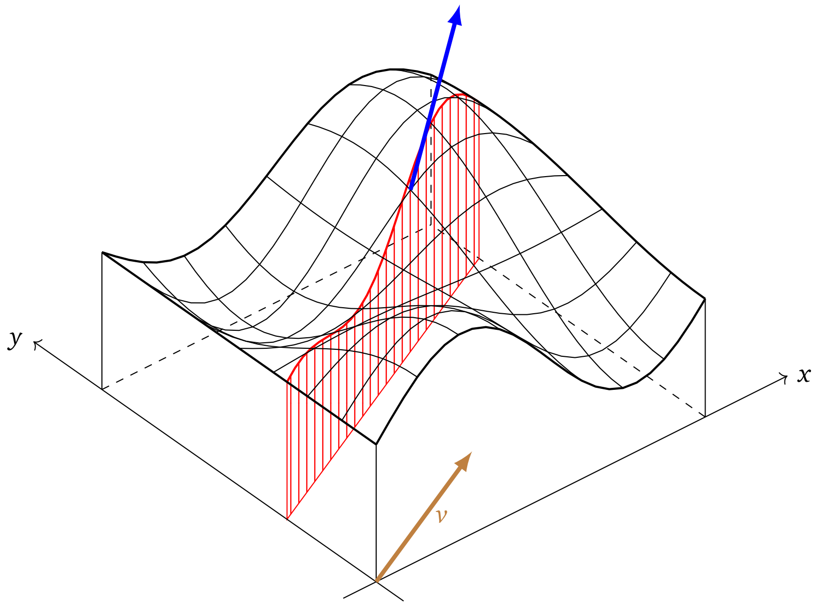
Interprétation géométrique.
Pour une fonction d'une variable, la dérivée en un point est la pente de la tangente au graphe de la fonction en ce point (le graphe est ici une courbe). Pour une fonction de deux variables $(x,y)\mapsto f(x,y)$, les dérivées partielles indiquent les pentes au graphe de f selon certaines directions (le graphe est ici une surface). Plus précisément :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ est la pente au graphe de f en (x_0,y_0) suivant la direction de l'axe (Ox). En effet, cette pente est celle de la tangente à la courbe $z=f(x,y_0)$ et est donnée par la dérivée de $x\mapsto f(x,y_0)$ en x_0. C'est donc bien $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ est la pente au graphe de f en (x_0,y_0) suivant la direction de l'axe (Oy).
- Plus généralement, si v est un vecteur unitaire (i.e. de norme 1) alors $D_vf(x_0,y_0)$ est la pente de la tangente suivant la direction v.

Sur la figure de gauche, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ indique la pente en un point d'une tranche parallèle à l'axe (Ox) (en orange). Sur la figure de droite, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ indique la pente en un point d'une tranche parallèle à l'axe (Oy) (en vert).



Ci-dessous, la dérivée directionnelle $D_v f$ indique la pente en un point d'une tranche (en rouge) dans la direction d'un vecteur v.



Mini-exercices.

1. En utilisant seulement la définition avec les limites, calculer les dérivées partielles de la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 y$.
2. Calculer les dérivées partielles de la fonction f définie par $f(x,y) = e^{xy^2}$. Même question avec $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2\sin(xy)$; $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$; $f(x,y,z) = xy^2 + ze^{y/z}$; $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \ln(x_1 + \cdots + x_n)$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 0$ si $0 < y < x^2$ et $f(x,y) = 1$ sinon. Montrer que f a des dérivées partielles en $(0,0)$, mais n'est pas continue en $(0,0)$.
4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy^2 + x + y$. Calculer la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ suivant tout vecteur non nul $v = (h,k)$. Pour quel vecteur v unitaire cette dérivée est-elle maximale ?

2. Différentielle

La différentielle est une façon de regrouper toutes les dérivées partielles dans une seule fonction.

2.1. Différentiabilité

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'une seule variable, une autre façon d'écrire qu'elle est dérivable en x_0 est de vérifier qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \ell \cdot h}{h} = 0.$$

Et on note ce ℓ par $f'(x_0)$, de sorte que l'on a $f(x_0+h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\cdot h$ (pour h réel, assez petit). Autrement dit, on approche l'application $h \mapsto f(x_0+h) - f(x_0)$ par une fonction linéaire $h \mapsto f'(x_0)\cdot h$.

Nous allons faire ce même travail en dimension supérieure.

Définition 3.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La fonction f est *différentiable* en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une application linéaire $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

telle que :

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\ell(h)}{\|h\|} = 0$$

L'application ℓ est la ***différentielle*** de f en x_0 et se note $\mathrm{d}f(x_0)$.

Dans le cas des fonctions d'une variable, on a $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)$ (et $\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)\cdot h$). Dans le cas des fonctions de plusieurs variables, on verra juste après comment écrire la différentielle à l'aide des dérivées partielles. Noter que $\mathrm{d}f(x_0)$ est une application de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ (comme f), et donc $\mathrm{d}f(x_0)(h)$ est un réel (pour chaque $h\in\mathbb{R}^n$).

De même qu'en une variable, si une fonction est dérivable, alors elle est continue.

Proposition 1.
Si f est différentiable en $x_0\in\mathbb{R}^n$, alors f est continue en x_0.

Démonstration. Notons g la fonction définie par $g(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\mathrm{d}f(x_0)(h)}{\|h\|}$. Alors

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)(h) + \|h\|g(h)$$

et il est clair que $\mathrm{d}f(x_0)(h)$ et $\|h\|g(h)$ tendent vers 0 lorsque h tend vers le vecteur nul. Donc la limite de f en x_0 existe et vaut $f(x_0)$, et ainsi f est continue en x_0. □

Exemple 7.
Si $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est linéaire, alors ℓ est différentiable et sa différentielle en tout point est l'application ℓ elle-même : pour tous $x_0\in\mathbb{R}^n$ et $h\in\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{d}\ell(x_0)(h) = \ell(h).$$

2.2. Différentielle

Proposition 2.
Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en $x_0\in\mathbb{R}^n$, alors ses dérivées partielles existent et on a :

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \cdots + h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$$

où $h = (h_1,\dots,h_n)$.

En particulier, lorsqu'elle existe, la différentielle est unique.

Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable en (x_0,y_0), la formule est :

$$\boxed{\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k) = h\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

Démonstration. Prouvons la formule pour deux variables. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Soit $\ell(h,k) = ah+bk$ sa différentielle. Alors, par définition, lorsque $\|(h,k)\|\to 0$, on a :

$$\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\ell(h,k)}{\|(h,k)\|} \longrightarrow 0$$

Pour $(h,k) = (t,0)$ avec $t>0$ et $t\to 0$, on a donc :

$$\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)-t\ell(1,0)}{t} = \frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t} - \ell(1,0) \longrightarrow 0$$

C'est exactement dire que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \ell(1,0) = a.$$

Avec $(h,k)=(0,t)$, on prouve de même que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\ell(0,1)=b.$$

Ainsi,

$$\ell(h,k)=h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

□

Pour montrer qu'une fonction est différentiable, on peut utiliser que la somme, le produit, l'inverse (d'une fonction ne s'annulant pas) et la composition de fonctions différentiables est différentiable. Sinon, il faut revenir à la définition. Par exemple, pour $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$:

1. tout d'abord, on calcule les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$,
2. on écrit le candidat à être la différentielle $\ell(h,k)=h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$,
3. il faut enfin prouver la limite, lorsque $\|(h,k)\|\to 0$:
$$\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\ell(h,k)}{\|(h,k)\|}\longrightarrow 0.$$

Exemple 8.
Étudier la différentiabilité en tout point de la fonction f définie par

$$f(x,y)=x-3y+\frac{x^4}{x^2+y^2}\quad\text{si }(x,y)\neq(0,0)\qquad\text{et}\qquad f(0,0)=0.$$

Solution.

- En dehors de $(0,0)$, la fonction f est différentiable, car f est une somme, produit, inverse de fonctions différentiables (car x^2+y^2 ne s'annule qu'à l'origine).
- En $(0,0)$, il faut étudier la différentiabilité à la main.
  — Dérivée partielle par rapport à x :
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+h^2}{h}=1$$
  — Dérivée partielle par rapport à y :
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-3k}{k}=-3$$
  — Le candidat à être la différentielle est donc :
  $$\ell(h,k)=h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=h-3k$$
  — On calcule :
  $$0\leqslant\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\ell(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{h^4}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\leqslant\frac{h^4}{|h|^3}=|h|\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}0.$$
  Donc f est différentiable au point $(0,0)$ et $\mathrm{d}f(0,0)(h,k)=h-3k$.

2.3. Lien avec les dérivées partielles

Dérivées partielles.
On a vu dans la proposition 2 que si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est différentiable en (x_0,y_0), alors

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(1,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\qquad\text{et}\qquad\mathrm{d}f(x_0,y_0)(0,1)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

En toute dimension, pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et e_i le i-ème vecteur de la base canonique :
$$\mathrm{d}f(x_0)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

Dérivée directionnelle.
Plus généralement, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors $\mathrm{d}f(x_0)(v) = D_v f(x_0)$. Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cela signifie que si $v = (h,k)$, alors :

$$\boxed{D_{(h,k)}f(x_0,y_0) = h\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

Si f n'est pas différentiable, cette formule peut être fausse.

Gradient.
Le gradient est une autre façon de coder la différentielle. Le ***gradient*** de f en x_0 est le vecteur
$$\operatorname{grad} f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$
Si f est différentiable en x_0, alors
$$\mathrm{d}f(x_0)(v) = \langle \operatorname{grad} f(x_0) \mid v \rangle,$$
où $\langle u \mid v \rangle$ est le produit scalaire de u et v.
Nous reviendrons en détail sur le gradient et ses applications dans le chapitre « Gradient – Théorème des accroissements finis ».

Résumé.
Lorsque f est différentiable alors la différentielle, la dérivée directionnelle, et le gradient encodent la même information et sont reliés par les formules :

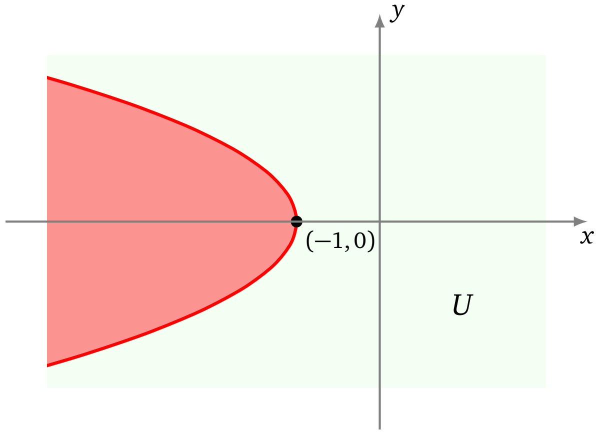
$$\boxed{D_v f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0)(v) = \langle \operatorname{grad} f(x_0) \mid v \rangle}$$

Exemple 9.
Soit f la fonction définie par
$$f(x,y) = \ln(1 + x + y^2).$$

1. Déterminer le domaine de définition U de f.
2. Calculer les dérivées partielles de f.
3. Montrer que f est différentiable sur U.
4. Calculer le gradient de f en $(0,1)$ et exprimer la différentielle en ce point.
5. Calculer la dérivée directionnelle de f en $(0,1)$ suivant le vecteur $(2,1)$.

Solution.

1. On a $U = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x + y^2 > 0\big\}$.



2. Les dérivées partielles sont :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+x+y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1+x+y^2}$$
3. f est différentiable sur U comme somme, produit et composée de fonctions différentiables.
4. Le gradient s'obtient directement à partir des dérivées partielles :
$$\operatorname{grad} f(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
La différentielle en ce point $\mathrm{d}f(0,1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'application linéaire définie par
$$\mathrm{d}f(0,1)(h,k) = \langle \operatorname{grad} f(0,1) \mid (h,k) \rangle = \frac{1}{2}h + k.$$
5. Comme f est différentiable, la dérivée directionnelle est simplement la combinaison linéaire des dérivées partielles :
$$D_{(2,1)} f(0,1) = 2 \times \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + 1 \times \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2$$
On aurait aussi pu faire le calcul via la formule $D_{(2,1)} f(0,1) = \mathrm{d}f(0,1)(2,1)$.

Mini-exercices.

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = g(x+y)$. Montrer que f est différentiable et que $\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k) = g'(x_0+y_0)h + g'(x_0+y_0)k$.
2. Soit $f(x,y) = 2xy - 7x + 8y$. En utilisant la définition, montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.
3. Soit f définie par $f(x,y) = ye^{x/y}$. Trouver le domaine de définition U de f. Montrer que f est différentiable sur U. Calculer ses dérivées partielles. Calculer la dérivée directionnelle de f en $(4,2)$ suivant le vecteur $v = (-1,1)$.

3. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Dans la pratique, les fonctions seront souvent de classe $\mathscr{C}^1$, ce qui implique la différentiabilité, et est plus facile à vérifier.

3.1. Définition

Définition 4.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que f est de ***classe $\mathscr{C}^1$*** si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent et sont continues (pour $i = 1, \ldots, n$).

On peut bien sûr limiter la définition à un ouvert. Par exemple, si U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ sera de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur U.

Théorème 1.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors f est différentiable.

Une autre façon de dire que f est différentiable est de dire que f admet un ***développement limité à l'ordre 1***.
Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si f est différentiable au point (x_0, y_0), alors

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o\left(\|(h,k)\|\right).$$

On rappelle la notation « petit o ».
Notation. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $(0,0)$. On dit que g est ***négligeable*** par rapport à $\|(x,y)\|^n$ au voisinage de $(0,0)$ et on note $g = o\left(\|(x,y)\|^n\right)$ si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\|(x,y)\|^n} = 0.$$

Exemple 10.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin x \cdot e^{2y}$.

- On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \cdot e^{2y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\sin x \cdot e^{2y}$. Les deux dérivées partielles existent et sont continues donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}^2$.
- En particulier, f est différentiable en tout point $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ et
$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k) = h\cos x_0 e^{2y_0} + 2k\sin x_0 e^{2y_0}.$$
- Par exemple, pour $(x_0,y_0) = (\frac{\pi}{6}, 1)$, on a le développement limité :
$$f(\tfrac{\pi}{6}+h, 1+k) = f(\tfrac{\pi}{6},1) + h\frac{\partial f}{\partial x}(\tfrac{\pi}{6},1) + k\frac{\partial f}{\partial y}(\tfrac{\pi}{6},1) + o\left(\|(h,k)\|\right)$$
Ainsi :
$$f(\tfrac{\pi}{6}+h, 1+k) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}e^2 h + e^2 k + \epsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$
où $\epsilon(h,k) \to 0$ lorsque $(h,k) \to (0,0)$.

Démonstration. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage du point (x_0,y_0) : elle admet donc des dérivées partielles continues au voisinage de (x_0,y_0).
Pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = \left[f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)\right] + \left[f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0+h,y_0)\right].$$

La fonction $x \mapsto f(x,y_0)$ est dérivable en x_0, donc

$$f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + h\epsilon_1(h)$$

avec $\lim_{h\to 0}\epsilon_1(h) = 0$.

Fixons h : la fonction $y \mapsto f(x_0+h, y)$ est dérivable autour de y_0. Appliquons le théorème des accroissements finis à cette fonction d'une variable sur l'intervalle $[y_0, y_0+k]$; il existe donc $\ell \in]0, k[$ tel que

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) = k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\ell).$$

Le réel ℓ dépend de k et de h et tend vers 0 lorsque k tend vers 0 (uniformément en h). Or, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue au point (x_0, y_0), donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\ell) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \epsilon_2(h,k)$ avec $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon_2(h,k) = 0$, d'où

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) = k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + k\epsilon_2(h,k).$$

Ainsi,

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + h\epsilon_1(h) + k\epsilon_2(h,k).$$

Or

$$\frac{|h\epsilon_1(h) + k\epsilon_2(h,k)|}{\|(h,k)\|} \leqslant |\epsilon_1(h)| + |\epsilon_2(h,k)| \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0,$$

donc

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \mathrm{d}f(x_0, y_0)(h,k) + o\left(\|(h,k)\|\right).$$

Ainsi f admet un développement limité d'ordre 1 au point (x_0, y_0), autrement dit f est différentiable en ce point. $\square$

3.2. Résumé

$$\begin{tikzcd}
 & & f \text{ est continue} \\
f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{déf.}"] & f \text{ est différentiable} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{déf.}"] & \\
f \text{ a des dérivées partielles continues} & f \text{ admet un DL à l'ordre 1} & f \text{ a des dérivées partielles (et directionnelles)}
\end{tikzcd}$$

- Les équivalences sont issues des définitions.
- Les implications viennent du théorème 1, de la proposition 1 et de la proposition 2.
- Les implications inverses sont fausses : voir les exemples ci-dessous.

3.3. Contre-exemples

Dans cette partie, on justifie que les énoncés précédents ne peuvent pas être améliorés. Cette section peut être passée en première lecture.

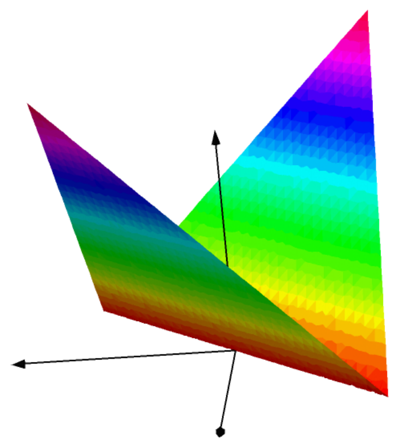
Si f est différentiable, alors f est continue. La réciproque est fausse, comme le prouve l'exemple suivant.

Exemple 11.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = |x+y|$. Alors f est continue (comme somme et composée de fonctions continues), mais n'est pas différentiable. Par exemple, $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas définie en $(0,0)$, car

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

n'a pas de limite lorsque $h \to 0$. (Plus précisément, c'est $+1$ pour les $h > 0$ et -1 pour les $h < 0$.) Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.



Sur la figure du graphe de f, on devine que, en tout point de la droite $(y = -x)$, f n'est pas différentiable.

Si f est différentiable, alors f admet des dérivées partielles et des dérivées directionnelles dans toutes les directions. La réciproque est fausse, comme le prouve l'exemple suivant.

Exemple 12.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que f admet une dérivée directionnelle suivant tout vecteur non nul au point $(0,0)$, mais qu'elle n'y est pas différentiable.

Solution.

1. Soit $v = (h,k) \neq (0,0)$.
   - Si $h = 0$, on a $\dfrac{f(t \cdot v) - f(0,0)}{t} = \dfrac{f(0,tk)}{t} = k$.
   - Si $h \neq 0$, on a $\left|\dfrac{f(t\cdot v) - f(0,0)}{t}\right| = \left|\dfrac{k^3t^2}{\sqrt{h^2t^2 + h^4t^4}}\right| \leqslant \left|\dfrac{k^3}{h}\right| |t| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

   Ainsi, $D_v f(0,0) = \begin{cases} k & \text{si} \quad h = 0, \\ 0 & \text{si} \quad h \neq 0. \end{cases}$

2. Avec $v = (1,0)$, on aura $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, et avec $v = (0,1)$, on aura $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$. Le candidat à être la différentielle en $(0,0)$ est donc $\ell(h,k) = k$. Mais l'expression
$$\epsilon(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - \ell(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{k^3 - k\sqrt{h^2+k^4}}{\sqrt{h^2+k^2}\sqrt{h^2+k^4}}$$
ne tend pas vers 0 lorsque $(h,k) \to 0$, car $\lim_{t\to 0^+} \epsilon(t,t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors elle différentiable. La réciproque est fausse, comme le prouve l'exemple suivant.

Exemple 13.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x,y) = y^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ sans être de classe $\mathscr{C}^1$ à l'origine.

Solution.

- **En dehors de l'origine.**
  Les dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$
  et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$
  existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et, par le théorème 1, est donc différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- **Différentiabilité au point $(0,0)$.**
  — Calculons les dérivées partielles de f au point $(0,0)$. Comme $f(x,0) = 0$ alors
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0.$$
  Et comme $f(0,y) = y^2\sin\left(\frac{1}{y^2}\right)$, alors
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} k\sin\left(\frac{1}{k^2}\right) = 0.$$
  — Le candidat à être la différentielle en $(0,0)$ est donc $\ell(h,k) = 0$.
  — De plus,
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\ell(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right).$$
  Or $\left|\frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)\right| \leqslant |k| \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$, donc f est différentiable au point $(0,0)$.
- **Conclusion.**
  La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,t) = -\frac{1}{2t}\cos\left(\frac{1}{2t^2}\right)$$
  n'a pas de limite lorsque $t \to 0$. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est donc pas continue en $(0,0)$. Ainsi, f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ à l'origine.

Mini-exercices.

1. Justifier que la fonction définie par $f(x,y) = \ln(1+x+2y)\cos(y)$ est différentiable sur son ensemble de définition. Écrire le développement limité à l'ordre 1 de f en $(0,0)$. Même travail avec $f(x,y) = \sqrt{1+x-2y}$.
2. Montrer que la fonction $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ admet des dérivées partielles en tout point, mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.
3. Montrer que la fonction de deux variables $f(x,y) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(x,y) = 0$ sinon est différentiable, mais que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Auteurs du chapitre

Arnaud Bodin. D'après des cours de Abdellah Hanani (Lille), Goulwen Fichou et Stéphane Leborgne (Rennes), Laurent Pujo-Menjouet (Lyon). Relu par Anne Bauval, Vianney Combet et Barbara Tumpach.